MATRICI

UNA MATRICE $A \in MAT(m,n)$ E' UNA TABELLA ORDINATA DI NUMERI DISPOSTI IN m RIGHE ED n COLONNE. INDICHIAMO CON a_{ij} L'ELEMENTO DI POSTO $i\,j$, CHE PUO' ESSERE REALE O COMPLESSO.

OPERAZIONI DI MATRICI

1) $(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

2) $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

PROPRIETA' DELLA SOMMA: ASSOCIATIVA, SIMMETRICA
CON 1) E 2) $mat(m,n)$ E' UNO SPAZIO VETTORIALE.

SIANO: $A \in Mat(m,p)$, $B \in Mat(p,n)$, $C \in Mat(m,n)$

SI DEFINISCE PRODOTTO DI A E B LA MATRICE C DATA DA:

$$(C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{ik} (B)_{kj}$$

PROPRIETA' DEL PRODOTTO: ASSOCIATIVA, DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA, <u>NON</u> SEMPRE <u>VALE</u> LA PROPRIETA' COMMUTATIVA.

MATRICE TRASPOSTA DI $A \in Mat(m,n)$ E' $C \in Mat(n,m)$

$$C = A^T, \quad c_{ij} = a_{ji}$$

MATRICE TRASPOSTA CONIUGATA

$$C = A^*, \quad c_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

UNA MATRICE QUADRATA $A \in Mat(n,n)$ SI DICE HERMITIANA SE: $A = \bar{A}^T = A^*$

MATRICE UNITA' OD IDENTICA I : $IA = AI = A \quad \forall A \in Mat(n,n)$

MATRICE DIAGONALE : $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

" TRIANGOLARE SUPERIORE : $a_{ij} = 0 \quad i > j$

" " INFERIORE : $a_{ij} = 0 \quad i < j$

" TRIDIAGONALE : $a_{ij} = 0 \quad |i-j| > 1$

" DI HESSENBERG : $a_{ij} = 0 \quad j > i+1$

OPPURE $i > j+1$

DATA $A \in Mat(n,n)$ SIMMETRICA SI DICE DEFINITA POSITIVA SE PER $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ SI HA:

$$x^T A x > 0$$

SE SI HA: $x^T A x \geq 0$ ALLORA A E' SEMIDEFINITA POSITIVA

DETERMINANTE

SIA $A \in Mat(n,n)$: $det(A) = \Sigma (-1)^s a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

LA SOMMA E' ESTESA AD $n!$ PERMUTAZIONI, E $j_1, .., j_n$ SONO LE PERMUTAZIONI DEGLI INDICI.

TEOREMA DI BINET

DATE DUE MATRICI A e B SI HA:

$$DET(AB) = DET(A) \cdot DET(B)$$

TEOREMA DI SYLVESTER

C.N.&S. AFFINCHE' A SIA SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA E' CHE $\det(A_k) > 0 \quad k = 1, \dots, n$, DOVE A_k E' LA MATRICE DATA DALL'INTERSEZIONE DELLE PRIME K RIGHE E K COLONNE.

ES.: $A = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad A_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad A_{\underset{n}{\vdots}} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI SYLVESTER

SIA $A \in Mat(n,n)$ SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA. ALLORA:

1) GLI ELEMENTI DIAGONALI SONO TUTTI POSITIVI
2) $|a_{ij}|^2 < a_{ii} \cdot a_{jj} \quad i \neq j$

MATRICE DIAGONALMENTE DOMINANTE: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, n$

MATRICE DEBOLMENTE " " : $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, n$

PROPRIETA'

SIA A UNA MATRICE SIMMETRICA DIAGONALMENTE DOMINANTE A DIAGONALE POSITIVA $\Rightarrow$ DEFINITA POSITIVA.

MATRICE AGGIUNTA: MATRICE TRASPOSTA DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \vdots & & & \\ A_{1m} & \dots & \dots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

TALE MATRICE GODE DELLA SEGUENTE PROPRIETA':

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det(A)\, I_m$$

SI HA INOLTRE: SE $\det(A) \neq 0$ ALLORA:

$$\left(\frac{\hat{A}}{\det(A)}\right) A = I_m$$

OVVERO:

$$\frac{\hat{A}}{\det(A)} = A^{-1}$$ INVERSA DI A

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$$

PROPRIETA': LA MATRICE INVERSA QUANDO ESISTE E' UNICA.

DIM. PER ASSURDO

SUPPONIAMO CHE $\exists B: \; BA = I$

$$BAA^{-1} = IA^{-1}$$

$$BI = IA^{-1} \Rightarrow B = A^{-1} \quad \blacksquare$$

MATRICE NON DEGENERE: $A \in Mat(m,m)$, $\det(A) \neq 0$

SIANO A, B NON DEGENERI E SIA: $C = A \cdot B$

(NON DEGENERE PER IL TEOREMA DEL BINET)

$\Rightarrow C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DIM. $CC^{-1} = I$, $(AB)C^{-1} = I$, $A^{-1}ABC^{-1} = A^{-1}$, $BC^{-1} = A^{-1}$

$B^{-1}BC^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ■

PRODOTTO SCALARE

SIANO $a, b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. IL PRODOTTO SCALARE $\langle a, b \rangle$ E'

DATO DAL NUMERO: $\langle a, b \rangle = \bar{a}^T b = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$

PROPRIETA'

i) $\langle a, a \rangle \geq 0$

ii) $\langle a, a \rangle = 0 \iff a = \underline{0}$

iii) $\langle a, \alpha b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$

iv) $\langle \alpha a, b \rangle = \bar{\alpha} \langle a, b \rangle$

v) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

vi) $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$

vii) $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle} = \sum \bar{b}_i a_i$

viii) $|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$

MODULO DI a: $\langle a, a \rangle^{1/2} = |a|$ SI HA:

$|a| \geq 0$

$|a| = 0 \iff a = \underline{0}$

$|ka| = |k|\,|a|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

NORME VETTORIALI

LA NORMA SI INDICA CON $\|\cdot\|$ E' UNA FUNZIONE DEFINITA SU UNO SPAZIO VETTORIALE A VALORI REALI POSITIVI. $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+$

GODE DELLE PROPRIETA':

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^n$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

DISTANZA : $d(x,y) = \|x-y\|$

SI HA:

i) $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

ii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

LA NORMA E' UNA FUNZIONE CONTINUA DELLE COMPONENTI DEL VETTORE X :

$$\lim_{\delta \to 0} \|x+\delta\| = \|x\|$$

NORMA p O NORMA HÖLDERIANA $\quad 1 \leq p < \infty$

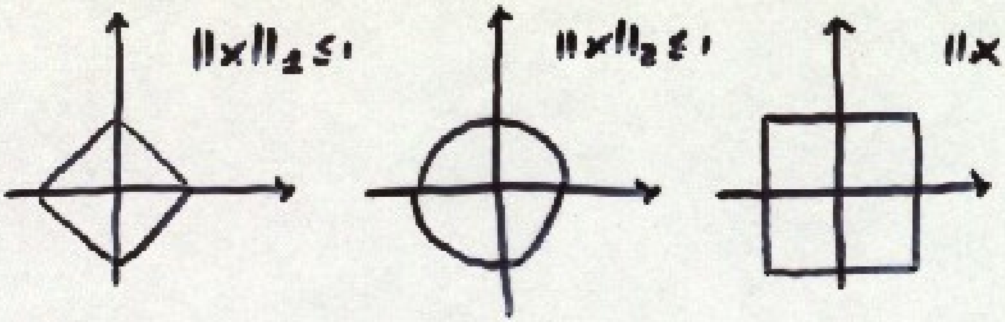
$$\|x\|_p = \left| \Sigma_i |x_i|^p \right|^{1/p}$$

SI HA: $\|x\|_1 = \Sigma_i |x_i|$

$\|x\|_2 = (\Sigma_i |x_i|^2)^{1/2}$ EUCLIDEA

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ DEL MASSIMO

SE $x \in \mathbb{R}^2$ I CERCHI UNITARI : $\|x\|_p \leq 1$ $p=1,2,\infty$ SONO:



TEOREMA

IN $\mathbb{R}^n$ LE NORME $1, 2, \infty$ SONO EQUIVALENTI

CIOE' $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq \beta$

$$\alpha \|x\|' \leq \|x\|'' \leq \beta \|x\|'$$

NORME MATRICIALI

E' UNA FUNZIONE : $\mathbb{C}^{m \times n} \to \mathbb{R}^+$

1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$
3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5) $\|Ax\|_p \leq \|A\| \, \|x\|_p$

UNA NORMA MATRICIALE SI DICE **INDOTTA** SE PER $\forall\, A \in Mat(m,n)$ $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$

SI DEFINISCE **NORMA NATURALE DI A** :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

TALE DEF. E' EQUIVALENTE A:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

PERTANTO:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \quad \forall x \neq 0$$

CHE EQUIVALE A: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

N.B. UNA NORMA NATURALE NON E' DETTO CHE SIA INDOTTA.

LA NORMA MATRICIALE E' FUNZIONE CONTINUA DEL SUO ARGOMENTO.

VEDIAMO LE NORME NATURALI INDOTTE DALLE NORME VETTORIALI $1, 2, \infty$.

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \rightarrow \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} \rightarrow \|A\|_2 = \left(\rho(A^T A)\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \rightarrow \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_j |a_{ij}|$$

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

$A \in Mat(m,n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ E' AUTOVALORE DI A SE:

$$\exists\ \underline{x} \in \mathbb{C}^n,\ \underline{x} \neq 0 : (A - \lambda I)\underline{x} = 0$$

TALE VETTORE $\underline{x}$ SI DICE AUTOVETTORE ASSOCIATO A λ.

SPETTRO DI A: INSIEME DEGLI AUTOVALORI $\sigma(A)$

UN AUTOVETTORE E' SEMPRE $\neq 0$. UN AUTOVALORE E' $= 0$ SE A E' SINGOLARE

RAGGIO SPETTRALE: MAX DEI MODULI DEGLI AUTOVALORI

SE $\det(A - \lambda I) = 0$ IL SISTEMA LINEARE DI n EQS. IN n INCOGNITE $(A - \lambda I)\underline{x} = 0$ AMMETTE SOLUZIONI NON NULLE.

POLINOMIO CARATTERISTICO: $\det(A - \lambda I)$ DI GRADO n.

EQUAZIONE CARATTERISTICA: $\det(A - \lambda I) = 0$.

GLI A.V. DI UNA MATRICE SONO TUTTE E SOLE LE RADICI DELL' EQ. CARATTERISTICA.

PROPRIETA'

i) A ED A^T HANNO GLI STESSI A.V.

INFATTI $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T$

ii) $\det(A) = 0 \iff \lambda = 0$

iii) Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ e SE μ E' A.V. DI A $\Rightarrow \mu^{-1}$ A.V. DI A^{-1}

INFATTI: $Ax = \mu x$, $A^{-1}Ax = \mu A^{-1}x$,

$$A^{-1}x = \frac{1}{\mu}x$$

IV) SIA μ A.V. DI A CUI E' ASSOCIATO $\underline{x}$ $\Rightarrow$
$\forall s \in \mathbb{N}$, μ^s E' A.V. DI A^s " "
CIOE': $Ax = \mu x \Rightarrow A^s x = \mu^s x$

V) SE μ E' A.V. DI A, μ^s E' A.V. DI A^s $\forall s \in \mathbb{Z}$

- - -

SIANO $A, B \in Mat(n,n)$, $\exists B^{-1}$ E SIA $C = B^{-1}AB$
C SI DICE TRASFORMATA PER CONTRAGRADIENZA DI A MEDIANTE B.

DUE MATRICI TRASFORMATE PER CONTRAGRAD. L'UNA DALL'ALTRA SI DICONO SIMILI

TEOREMA

DUE MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO E QUINDI GLI STESSI A.V.

Dim.

SIA: $C = B^{-1}AB$

$\det(C - \lambda I) = \det(B^{-1}AB - \lambda B^{-1}IB) =$
$\det(B^{-1}(A - \lambda I)B) = \det(B^{-1})\det(A - \lambda I)\det B =$
$= \det(A - \lambda I)$ ■

TEOREMA

SE A E C SONO SIMILI, ALLORA A^s E C^s SONO ANCORA SIMILI $\forall s \in \mathbb{N}$

Dim.

SIA $C = B^{-1}AB$

$$C^s = \underbrace{C \cdots\cdots C}_{s \text{ volte}} = (B^{-1}AB) \cdots (B^{-1}AB) = B^{-1}A(BB^{-1})AB \cdots B^{-1}AB =$$

$$= B^{-1} A^s B$$

TEOREMA

SE A e C SONO SIMILI E $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(C) \neq 0$

E INOLTRE A^{-1}, C^{-1} SONO SIMILI

Dim.

$$C = B^{-1}AB \Rightarrow \det(C) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) =$$
$$= \det(A)$$

$$C^{-1} = (B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}(B^{-1})^{-1} = B^{-1}A^{-1}B \quad \blacksquare$$

TEOREMA DI GERSCHGORIN

SIA $A \in Mat(n,n)$ E: $\rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

$$\gamma_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho_i \} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$$

SE $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \gamma$

Dim.

SIA λ A.V. DI A ED $\underline{x}$ A.V. ASSOCIATO AD ESSO.

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad i = 1, \dots, n$$

SCEGLIAMO r TALE CHE: $|x_r| \geq |x_j| \quad j=1,..,n$

OVVERO : $\|x\|_\infty = |x_r|$

$$a_{rr} x_r + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} a_{rj} x_j = \lambda x_r$$

$$(a_{rr}-\lambda) x_r = - \sum_{j\neq r} a_{rj} x_j$$

$$|a_{rr}-\lambda| \leq \sum_{j\neq r} |a_{rj}| \left|\frac{x_j}{x_r}\right| \leq \sum_{j\neq r} |a_{rj}|$$

$$\Rightarrow |a_{rr}-\lambda| \leq \rho_r \Rightarrow \lambda \in \gamma_r \quad \blacksquare$$

INOLTRE: POICHÉ A ED A^T HANNO GLI STESSI AUTOVALORI

SI HA:
$$\gamma' = \bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho'_i \}$$

CON: $$\rho'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|$$

$$\lambda \in \gamma' \Rightarrow \lambda \in \gamma \cap \gamma'$$

CONSEGUENZE

TEOREMA

$\forall$ MATRICE $A \in Mat(n,n)$ A DIAGONALE STRETTAMENTE DOMINANTE E' NON DEGENERE

Ip. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Ts. $det(A) \neq 0$

Dim. per assurdo

SIA: $det(A) = 0 \Rightarrow 0$ è A.V. di $A \Rightarrow 0 \in \gamma$ PER GERSCHGORIN

E POICHE' $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$ $\exists i: 0 \in \gamma_i$ CIOE':

$$|0 - a_{ii}| \leq \rho_i \Rightarrow |a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \blacksquare$$

CHE E' ASSURDO

TEOREMA DI HERMITE

Ip. $A \in Mat(n,n)$, $A = \bar{A}^T$ HERMITIANA

Ts. GLI A.V. DI A SONO TUTTI REALI

Dim.

Sia μ A.V. DI A E $\underline{x}$ UN AUTOVETTORE ASSOCIATO AD ESSO.

$$A\underline{x} = \mu \underline{x}$$
$$\bar{x}^T A x = \mu \bar{x}^T x = \mu \langle x, x \rangle$$

POICHE' $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$ DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\bar{x}^T A x \in \mathbb{R}$

$$\overline{\bar{x}^T A x} = x^T \bar{A} \bar{x} = (x^T \bar{A} \bar{x})^T = \bar{x}^T \bar{A}^T x = \bar{x}^T A x \quad \blacksquare$$

TEOREMA

SE A E' SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA GLI AUTOVALORI SONO TUTTI REALI POSITIVI

TEOREMA

C.N.S. PERCHE' A SIA HERMITIANA E' CHE:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Dim.

Ip. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

Ts. $A = \bar{A}^T$

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \Rightarrow \langle Ax, y \rangle = (\bar{A}\bar{x})^T y = \bar{x}^T \bar{A}^T y = \langle x, \bar{A}^T y \rangle$

SOTTRAENDO: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

$$0 = \langle x, Ay \rangle - \langle x, \bar{A}^T y \rangle$$

$$\Rightarrow A = \bar{A}^T$$

Ip. $A = \bar{A}^T$

Ts. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

$\langle Ax, y \rangle = (\bar{A}\bar{x})^T y = \bar{x}^T \bar{A}^T y = \bar{x}^T A y = \langle x, Ay \rangle$ ■

RIPRENDIAMO IL DISCORSO SUGLI A.V. DI A. POICHE' IL POLINOMIO CARATTERISTICO E' DI GRADO n, A HA n A.V. NON NECESSARIAMENTE DISTINTI. $\forall$ A HA ALMENO UNA COPPIA AV.-A.VETTORE E POICHE': $Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\alpha x = \lambda \alpha x$ IL PROBLEMA E' QUELLO DI DETERMINARE IL NUMERO DI AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

MOLTEPLICITA' ALGEBRICA MOLTEPLICITA' DELLE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

MOLTEPLICITA' GEOMETRICA # VETTORI LIN. INDIP. ASSOCIATI ALL'AUTOVALORE

MATRICE DIAGONALIZZABILE SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE

TEOREMA

UNA MATRICE $A \in Mat(n,n)$ E' DIAGONALIZZABILE SSE HA n AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

MATRICE UNITARIA $\bar{U}^T U = U \bar{U}^T = I$

MATRICE ORTOGONALE $U^T U = U U^T = I$

TEOREMA DI SCHUR

$A \in Mat(n,n) \Rightarrow \exists\, U$ unitaria :

$$T = \bar{U}^T A U$$

dove T E' TRIANGOLARE SUPERIORE $\square$

N.B. SE A E' REALE ALLORA U E' ORTOGONALE.

$A \in Mat(n,n)$ E' CONVERGENTE SE :

$$\lim_{m \to \infty} A^m = 0 \quad \text{(MATRICE ZERO)}$$

TEOREMA

SE A E' HERMITIANA ESSA E' DIAGONALIZZABILE $\square$

TEOREMA

C.N.S. PERCHE' $A \in Mat(n,n)$ SIA CONVERGENTE E' CHE:

$$\rho(A) < 1 \quad \square$$

TEOREMA

C.N.S. PERCHE' A SIA CONVERGENTE E' CHE SIA INFINITESIMA:

$$\|A^k\| \to 0 \quad \square$$

TEOREMA

$\rho(A) \leq \|A\|$