ORDINE DI ACCURATEZZA

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

MA: DIVERSA VELOCITA' DI CONVERGENZA.

DEFINIZIONE. $f(x)$ E' DETTA O-PICCOLO DI $g(x)$ PER $x\to x_0$, $f(x) = o(g(x))$ SE $\exists\, K(x) \geq 0$:

$$|f(x)| \leq K(x)\,|g(x)| \qquad \lim_{x\to x_0} K(x) = 0$$

SI DIRA' QUINDI CHE $f(x)$ E' TRASCURABILE RISPETTO A $g(x)$ PER $x\to x_0$. OVVERO $f/g \to 0$ PER $x\to x_0$.

$f(x) = o(1)$ $f(x)$ INFINITESIMA PER $x\to x_0$.

ES.: $x^4 = o(x^2)$ PER $x\to 0$
$x^4 + x^3 = o(x^2)$ "

DEFINIZIONE. $f(x)$ E' DETTA O-GRANDE DI $g(x)$ PER $x\to x_0$, $f(x) = O(g(x))$ SE $\exists\, c > 0$:

$$|f(x)| \leq c\,|g(x)|$$

PER x IN UN INTORNO DI x_0.

OVVERO f/g E' LIMITATO IN $I(x_0)$. $f(x) = O(1)$ SSE $f(x)$ E' LIMITATA IN $I(x_0)$.

ES.: $f(x) = \frac{x^3}{1+x}$, $g(x) = x^2$: $f(x) = O(x^2)$ $x\to 0$.

DEFINIZIONE. LA SUCCESSIONE $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E' O-GRANDE DI $\{y_n\}_{n\in N}$; $x_n = O(y_n)$ SE $\exists$ C, N :

$$|x_n| \le C|y_n| \qquad n \geq N$$

ES.:

$$\frac{n^2-1}{n^3} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

INFATTI: $\frac{n^2-1}{n^3} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \quad n \geq 1.$

DEFINIZIONE. $\tilde{f}_h(x)$ E' UNA APPROSSIMAZIONE DI ORDINE $\alpha > 0$ DI $f(x)$ SE :

$$E_h(x) = f(x) - \tilde{f}_h(x) = O(h^\alpha)$$

h "piccolo".

$$f(x) = \tilde{f}_h(x) + O(h^\alpha)$$

ES.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$(h=x)$: $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3)$ ORDINE 3

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$ ORDINE $n+1$

ANALISI DI STABILITA': A PRIORI E APOSTERIORI

ANALISI A PRIORI:
- ANALISI IN AVANTI (FORWARD)
- ANALISI ALL'INDIETRO (BACKWARD)

ANALISI IN AVANTI

ABBIAMO VISTO CHE SE: $x = \tilde{x} + \varepsilon_x, \; y = \tilde{y} + \varepsilon_y$

x, y VALORI ESATTI, $\tilde{x}, \tilde{y}$ VALORI APPROSSIMATI.

ALLORA L'ERRORE RELATIVO DELLA MOLTIPLIC. $x * y$ E' DATO DA:

$$\frac{xy - \tilde{x}\tilde{y}}{xy} = \frac{\tilde{x}\varepsilon_y + \tilde{y}\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y}{xy} = \frac{\tilde{x}}{xy}\varepsilon_y + \frac{\tilde{y}}{xy}\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{xy}$$

E SE: $\tilde{x}/x \sim 1, \; \tilde{y}/y \sim 1, \; \varepsilon_x\varepsilon_y \sim 0 \Rightarrow$

$$E_R \cong \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y}$$

QUESTA STIMA E' IN AVANTI CIOE' VIENE STIMATA LA VARIAZIONE DELLA SOL. CHE DIPENDE DAI DATI E DAL METODO NUMERICO. IMPOSSIBILE DA OTTENERE IN CODICI LUNGHI.

ANALISI ALL'INDIETRO STIMA DELLE PERTURBAZIONI SUI DATI PER OTTENERE LA SOL. TROVATA. CIOE' LA SOL. APPROSSIMATA VIENE INTESA COME LA SOL. ESATTA DI UN PROBLEMA PERTURBATO.

ES.: SIA $f(x)=e^x$ ED $\hat{f}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

UNA SOL. APPROSSIMATA.

ERRORE IN AVANTI IN $x=1$:

$$f(x)-\hat{f}(x)=e-\hat{f}(1)=2.718282-2.666667=$$
$$=0.051615$$

ERRORE ALL'INDIETRO: DETERMINIAMO $\hat{x}: f(\hat{x})=\hat{f}(1)$

$$e^{\hat{x}}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\ ,\qquad \hat{x}=\ln\left(\frac{8}{3}\right)=0.980829$$

$$x-\hat{x}=1-0.980829=0.019171$$

ANALISI A POSTERIORI

VIENE FORNITA UNA STIMA DELL'ERRORE SULLA BASE DI QUANTITA' EFFETTIVAMENTE CALCOLATE DA UN METODO NUMERICO.

VARIANDO OPPORTUNAMENTE ALCUNI PARAMETRI SI GARANTISCE CHE L'ERRORE SIA INFERIORE AD UNA TOLLERANZA PRESTABILITA: CONTROLLO ADATTIVO DELL'ERRORE.