

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 96 & 24 & 24 \\ 24 & 86 & 46 \\ 24 & 46 & 90 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la fattorizzazione LU della matrice A .

[6 punti]

(b) Facoltativo (da risolvere dopo aver svolto gli altri esercizi): Utilizzare la decomposizione LU per risolvere il sistema $LUx = b$, dove $b = (-72, 102, -22)^T$, risolvendo in successione i due sistemi:

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

[4 punti]

2. Determinare il grado di precisione (detto anche ordine polinomiale) della formula di quadratura $I_n(f) = \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$ relativa all'integrale $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$, essendo

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$w_0 = \frac{5}{9}, \quad w_1 = \frac{8}{9}, \quad w_2 = \frac{5}{9}$$

[6 punti]

3. Si dimostri che per ogni terna di reali (y_1, y_2, y_3) esiste ed è unico il polinomio p di grado al più 2, tale che $p(0) = y_1$, $p(1) = y_2$, $\int_0^1 p(x) dx = y_3$.

[6 punti]

4. Illustrare il metodo di Newton per l'approssimazione di zeri di funzione e discuterne la convergenza. In particolare, stabilire l'ordine di convergenza nel caso generico.

[12 punti]