TRA TUTTI I POLINOMI MONICI DI GRADO $n+1$, $n \geq 0$

IL POLINOMIO $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ E' QUELLO CHE HA LA PIÙ

PICCOLA NORMA ∞ SU $[-1, 1]$.

INOLTRE, L'IMPORTANZA DI TALI POLINOMI E' LEGATA ALLA SCELTA DEI PUNTI DI INTERPOLAZIONE NELL' INTERP. LAGRANGIANA.

. — .

DEFINIAMO APPROSSIMAZIONE QUASI-MINMAX UN POLINOMIO $p_n \in \mathbb{P}_n$ TALE CHE $f(x) - p_n(x)$ CAMBI SEGNO IN $n+1$ PUNTI ξ_j, $j=0,..,n$, $a < \xi_0 < \dots < \xi_n < b$. POICHE' IN TAL CASO TALE DIFFERENZA HA MAX E MIN LOCALI CON SEGNO ALTERNANTE TALI PUNTI SONO GLI x_i, $i=0,..,n+1$ RICHIESTI DAL TEOREMA DE LA VALLE'-POUSSIN. QUINDI LA NORMA ∞ DELL'ERRORE DEL POLINOMIO MINMAX STA TRA IL PIÙ GRANDE E IL PIÙ PICCOLO DEI VAL. ASSOLUTI DI TALI MAX E MIN. LOCALI.

POICHE' SAPPIAMO CHE:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$$

$$W_{n+1}(x) = (x - \xi_0) \dots (x - \xi_n)$$

ALLORA SE $f^{(n+1)}$ E' TALE DA NON CAMBIARE SEGNO

(32)

IN $[a,b]$ ALLORA IL POLINOMIO OTTENUTO CON $\xi_i, i=0,\dots,n$ ZERO DEI POLINOMI DI CHEBICHEV OTTENUTI TRASFORMANDO $[-1,1]$ IN $[a,b]$ E' UN POLINOMIO DI QUASI MINMAX.

N.B. SE ξ_i SONO UGUALMENTE SPAZIATI L'ERRORE CAMBIA SEGNO SOLO NEGLI $n-1$ PUNTI INTERNI AD $[a,b]$ E QUINDI NON E' DI QUASI MIN-MAX.

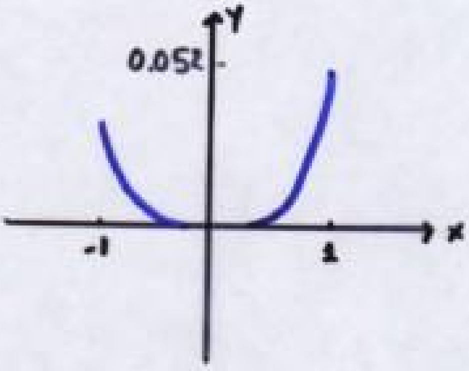
(33) 1.

Esempio. Approssimare e^x con $p \in \mathcal{P}_3$ $x \in [-1,1]$

$x_0 = 0$.

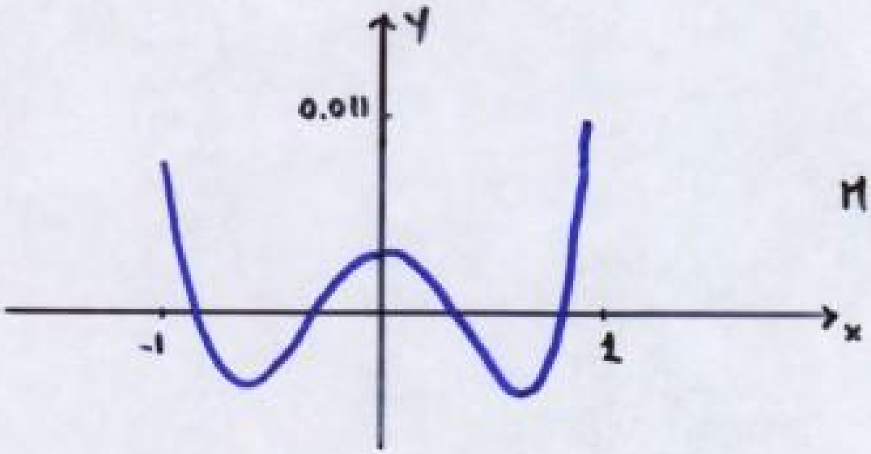
$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \qquad (*)$$

$$e^x - p_3(x) = \frac{x^4}{24} e^{\xi} \qquad 0 < \xi < x \quad (x < \xi < 0)$$

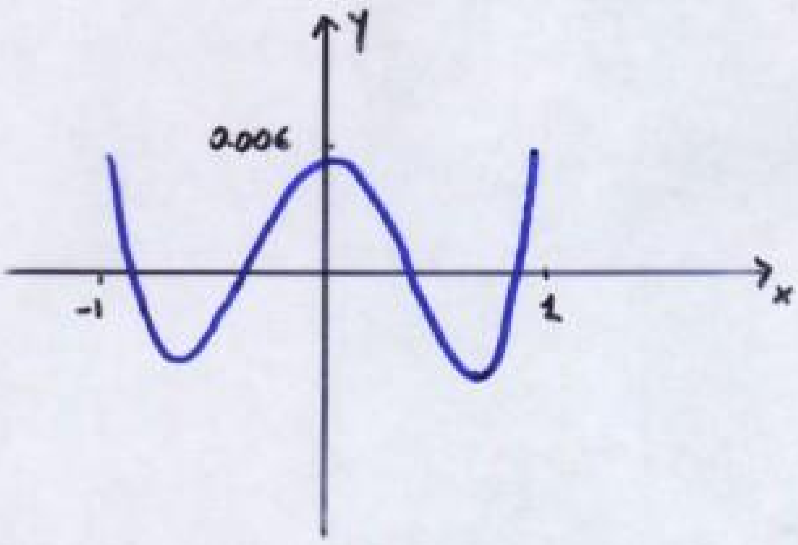


Curva dell'errore.

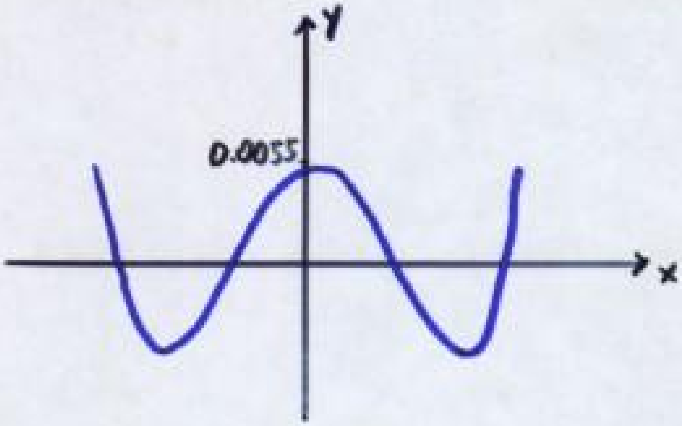
TAYLOR



MINIMI QUADRATI
CUBICA



CHEBYSHEV
CUBICA



MINIMAX

(*) RICORDIAMO L'ESPANSIONE IN SERIE DI TAYLOR DI UNA FUNZIONE $f \in C^{m+1}[a,b]$ CHE CI DA' LA POSSIBILITA' DI APPROSSIMARE LA f CON $p_m \in P_m$.

$$p_m(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{m!} f^{(m)}(x_0)$$

$$x, x_0 \in [a,b]$$

NOTIAMO CHE, PER L'ESEMPIO RIPORTATO, SI HA:

$$e^{kx} - p_m(x) = \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{k^r x^r}{r!}$$

SU $[0,1]$, AD ES., TALE DIFFERENZA E' NON NEGATIVA E MONOTONA CRESCENTE, PERTANTO NON CAMBIA SEGNO E NON E' QUINDI DI QUASI-MINMAX. CIONONDIMENO, BASTA SCEGLIERE m SUFF. GRANDE PERCHE' L'ERRORE DIMINUISCA: INEFFICIENTE.

**

LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' IMPLICA CHE UN POLINOMIO ORTOGONALE RESTA TALE ANCHE SE MOLTIPLICATO PER UNA COSTANTE.
PER INDIVIDUARE UNIVOCAMENTE TALI POLINOMI, SI PUO' IMPORRE UNO "SCALING" PER GLI ELEMENTI DI CIASCUNA FAMIGLIA.

POLINOMI DI LEGENDRE

$w(x) = 1$

$[a,b] = [-1, 1]$

PONENDO $P_m(1) = 1$ SI HA:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

POLINOMI DI CHEBICHEV

$w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

SCALING OTTENUTO PONENDO IL COEFF. PRINCIPALE 2^{m-1}

$[a,b] = [-1, 1]$

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

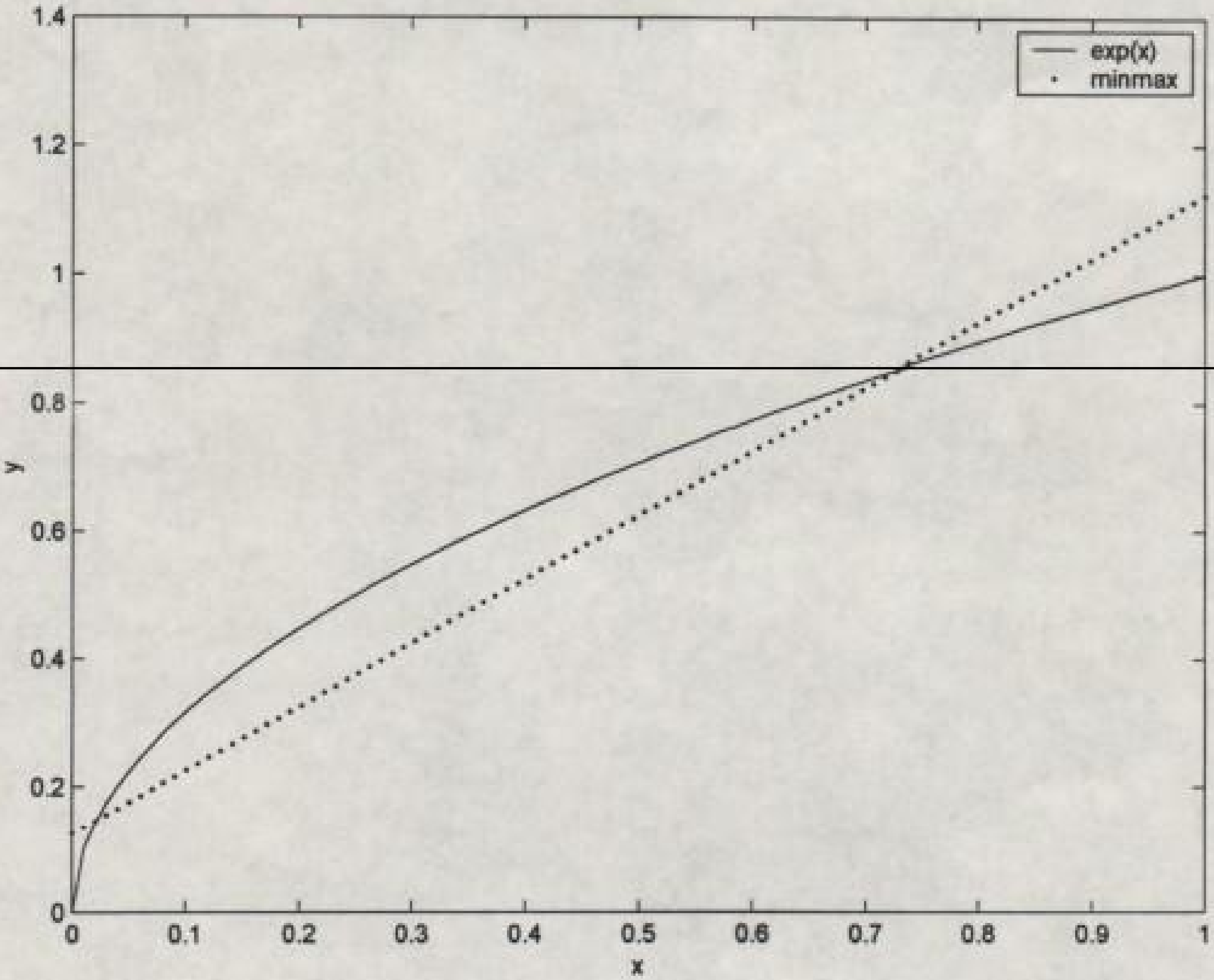
POLINOMI DI HERMITE

$w(x) = e^{-x^2}$

$[a,b] =]-\infty, +\infty[$

COEFF. PRINC. 2^m

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$


exp(x)
minmax
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x