21

5.

$$\int p_r(x)\, p_m(x) - A_m \int x\, p_r(x)\, p_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \int p_r(x)\, p_i(x)$$

PER $0 \le r \le m-3$ $\quad \lambda_r \int p_r^2(x) = 0 \Rightarrow \lambda_r = 0.$

$$\Rightarrow p_m(x) - A_m x\, p_{m-1}(x) = \lambda_{m-2}\, p_{m-2}(x) + \lambda_{m-1}\, p_{m-1}(x)$$

PONENDO: $\quad B_m = \lambda_{m-1}\,, \quad C_m = \lambda_{m-2}$ $\quad$ SI HA.

$$\boxed{p_m(x) = (A_m x + B_m)\, p_{m-1}(x) + C_m\, p_{m-2}(x)}$$

PER RICAVARE B_m MOLTIPL. PER $p_{m-1}(x)$ ED INTEGRIAMO

$$0 = \langle p_m, p_{m-1} \rangle = A_m \langle x\, p_{m-1}, p_{m-1} \rangle + B_m \langle p_{m-1}, p_{m-1} \rangle + C_m \underbrace{\langle p_{m-2}, p_{m-1} \rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_m = \frac{-A_m \langle x\, p_{m-1}, p_{m-1} \rangle}{\| p_{m-1} \|^2}}$$

ANALOGAMENTE, PER RICAVARE C_m MOLTIPL. PER p_{m-2}.

$$\langle p_m, p_{m-2} \rangle = 0 = A_m \langle p_{m-1}, x\, p_{m-2} \rangle + B_m \underbrace{\langle p_{m-1}, p_{m-2} \rangle}_{=0} + $$
$$+ C_m \langle p_{m-2}, p_{m-2} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_m = \frac{-A_m \langle p_{m-1}, x\, p_{m-2} \rangle}{\| p_{m-2} \|^2}}$$

PROVIAMO ADESSO L'ESISTENZA E L'UNICITA' DELLA M.A. AI M.Q.

TEOREMA DATA $f \in L^2_w(a,b)$ $\exists 1$ $p^*_n \in \mathbb{P}_n$:

$$\| f - p^*_n \|_2 = \min_{q \in \mathbb{P}_n} \| f - q \|_2$$

E TALE POLINOMIO E' DATO DA:

$$p^*_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, p_j \rangle p_j(x)$$

DOVE $\{p_j(x)\}_{j=0}^{n}$ E' L'INSIEME DEI POLINOMI ORTONORMALI DEFINITO RISPETTO AL P.I. DI $L^2_w(a,b)$.

DIM. SIA $p(x) \in \mathbb{P}_n$ POICHE' I $p_j(x)$ SONO ORTONORMALI ESSI SONO LIN. INDIP. E QUINDI

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j p_j(x)$$

$$0 \le \| f - p \|_2^2 = \langle f - p, f - p \rangle = \langle f - \textstyle\sum_j \alpha_j p_j, f - \sum_j \alpha_j p_j \rangle =$$

$$= \langle f, f \rangle - 2 \textstyle\sum_j \alpha_j \langle f, p_j \rangle + \sum_j \alpha_j^2 + \sum_j \langle f, p_j \rangle^2 - \sum_j \langle f, p_j \rangle^2$$

$$= \langle f, f \rangle - \textstyle\sum_j \langle f, p_j \rangle^2 + \sum_j \left(\alpha_j - \langle f, p_j \rangle \right)^2$$

CHE E' MINIMO SE : $\alpha_j = \langle f, p_j \rangle$ ∎

TALI COEFFICIENTI α_j SONO DETTI COEFFICIENTI GENERALIZZATI DI FOURIER.

DAL TEOREMA SI HA LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{j=0}^{m} \langle f, p_j \rangle^2$$

INOLTRE LA FUNZIONE RESTO $f(x)-p_m^*(x)$ E' ORTOGONALE AD $\forall\, p \in \mathbb{P}_m$. INFATTI, POICHE' $\forall p \in \mathbb{P}_m$ E' COMB. LINEARE DEI p_k POLINOMI ORTONORMALI, SI HA:

$$\langle f-p_m^*, p_k \rangle = \langle f, p_k \rangle - \sum_{j=0}^{m} \langle f, p_j \rangle \underbrace{\langle p_j, p_k \rangle}_{\delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases}} = \langle f, p_k \rangle - \langle f, p_k \rangle = 0$$

PROCEDURA PER IL CALCOLO DEL POLINOMIO DI M.A. AI M.Q.

- GENERARE L'INSIEME $\{p_j(x)\}_{j=0}^{m}$ CON GRAM-SCHMIDT
- CALCOLARE I COEFFICIENTI $\langle f, p_j \rangle$ $\quad 0 \leq j \leq m$
- COSTRUIRE $p_m^*(x)$ DA: $\quad p_m^*(x) = \sum_{j=0}^{m} \langle f, p_j \rangle\, p_j(x)$

ESEMPIO $\quad f(x) = \cos(\pi x) \quad$ CALCOLIAMO $p_2^* \in \mathbb{P}_2$

$$p_2^*(x) = -\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

ERRORE DELL'APPROSSIMAZIONE AI M.Q.

DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS SAPPIAMO CHE:

$$\lim_{m\to\infty} \|f-p_m^*\|_2 = 0$$

V. p. 23

MA: $\|f-p_m^*\|_2^2 = \langle f-p_m^*, f-p_m^* \rangle = \langle f-p_m^*, f\rangle - \underbrace{\langle f-p_m^*, p_m^* \rangle}_{=0} =$

$$= \langle f,f\rangle - \langle p_m^*, f\rangle = \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{m} \langle f,p_j\rangle\langle p_j, f\rangle =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{m} \langle f,p_j\rangle^2 \geq 0 \quad \text{per la disug. di Bessel.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f,p_j\rangle^2} \quad \text{POICHE' } \lim \|f-p_m^*\|_2 = 0$$

IDENTITA' DI PARSEVAL

$$\Rightarrow \boxed{\|f-p_m^*\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} \langle f,p_j\rangle^2} \quad \text{ERRORE m.q.}$$

CHE DA' L'ERRORE CERCATO, CHE DIPENDE DAI COEFFICIENTI DI FOURIER PER $j=m+1, \dots$

L' ERRORE PUNTUALE E' INVECE DATO DA:

TEOREMA SIA $p_m^*(x)$ IL POL. AI M.Q. M.A. DI $f \in C^2[-1,1]$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in [-1,1]$

$$|f(x) - p_m^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

(25)

POLINOMI DI LEGENDRE

SONO POLINOMI ORTOGONALI SU $[-1,1]$ CON LA FUNZIONE PESO

$$w(x) \equiv 1 \qquad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

SFRUTTANDO LE RELAZIONI DI RICORRENZA SI HA:

$$q_k(x) = (x - a_k)\, q_{k-1}(x) - b_k\, q_{k-2}(x) \qquad k \geq 2$$

$$a_k = \frac{\langle x q_{k-1}, q_{k-1} \rangle}{\langle q_{k-1}, q_{k-1} \rangle} \qquad b_1 = 0$$

$$b_k = \frac{\langle q_{k-1}, x q_{k-2} \rangle}{\langle q_{k-2}, q_{k-2} \rangle}$$

PONIAMO $q_0(x) \equiv 1 \Rightarrow \langle q_0, q_0 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2$

$$q_1(x) = (x - a_1)\, q_0(x) \; ; \; a_1 = \frac{\langle x q_0, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = 0 \Rightarrow q_1(x) = x$$

$$q_2(x) = (x - a_2)\, q_1(x) - b_2 q_0(x)$$

$$a_2 = \frac{\langle x q_1, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle q_1, x q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{1}{3} \Rightarrow q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

SI TROVA: $q_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$

APPROSSIMAZIONE MINMAX

IN ACCORDO AL TEOREMA DI WEIERSTRASS, $\forall f \in C[a,b]$ PUO' ESSERE APPROSSIMATA ARBITRARIAMENTE BENE DALL'INSIEME DI TUTTI I POLINOMI. SE PERO' CI RESTRINGIAMO ALL'INSIEME DEI POLINOMI DI GRADO n FISSATO, QUESTO NON E' PIU' VERO.

CI CHIEDIAMO QUINDI CON QUALE ACCURATEZZA PUO' ESSERE APPROSSIMATA UNA $f \in C[a,b]$ DA POLINOMI DI GRADO n FISSATO.

IL PROBLEMA E' QUINDI QUELLO DI CERCARE, DATO $f \in C[a,b]$, $n \geq 0$

$p_n \in \mathbb{P}_n$:
$$\|f - p_n\|_\infty = \inf_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|_\infty$$

TALE POLINOMIO E' DETTO DI M. APPROSS. DI GRADO n AD f NELLA NORMA ∞. POICHE' p_n MINIMIZZA IL MAX DELL'ERRORE E' DETTO **POLINOMIO MINMAX**.

TALE POLINOMIO HA UNA CARATTERISTICA PARTICOLARE CHE NE PERMETTE, IN ALCUNI CASI SEMPLICI, UNA COSTRUZIONE DIRETTA. TALE CARATTERISTICA E' ESPRESSA NEL SEGUENTE TEOREMA.

TEOREMA DE LA VALLÉE POUSSIN

SIA $f \in C[a,b]$ E $p_m \in \mathcal{P}_m$. SUPPONIAMO CHE ESISTANO $m+2$ PUNTI $x_0, \dots, x_{m+1}$ IN $[a,b]$ TALI CHE $f(x_i) - p_m(x_i)$ E $f(x_{i+1}) - p_m(x_{i+1})$ ABBIANO SEGNO ALTERNO, $i = 0, \dots, m$.

$$\Rightarrow \quad \min_{i=0,\dots,m+1} |f(x_i) - p_m(x_i)| \leq \min_{q \in \mathcal{P}_m} \|f - q\|_\infty$$

$\square$

IL TEOREMA SEGUENTE AFFERMA CHE SE LE QUANTITA' $|f(x_i) - p_m(x_i)|$ SONO TUTTE UGUALI A $\|f - p_m\|_\infty$ ALLORA p_m E' UN POLINOMIO MINMAX DI GRADO m PER f IN $[a,b]$

TEOREMA DI EQUIOSCILLAZIONE DI CHEBICHEV

SIA $f \in C[a,b]$. UN POLINOMIO $p_m \in \mathcal{P}_m$ E' MINMAX PER f in $[a,b]$ SSE $\exists$ $m+2$ PUNTI x_i, $i = 0, \dots, m+1$, $a \leq x_0 < \dots < x_{m+1} \leq b$

$$|f(x_i) - p_m(x_i)| = \|f - p_m\|_\infty \qquad i = 0, \dots, m+1$$

E INOLTRE

$$f(x_i) - p_m(x_i) = -[f(x_{i+1}) - p_m(x_{i+1})] \qquad i = 0, \dots, m$$

$\square$

CIOE' $f - p_m$ HA IL SUO MAX VALORE ASSOLUTO CON SEGNI ALTERNI NEI PUNTI x_i DETTI PUNTI CRITICI

TEOREMA DI UNICITA'

$\forall f \in C[a,b]$ HA UN UNICO POLINOMIO MINMAX

$p_m \in \mathcal{P}_m$ SU $[a,b]$ $\square$

TUTTI QUESTI TEOREMI CARATTERIZZANO $p_m^*(x)$ MA NON INDICANO COME COSTRUIRLO. APPLICHIAMO IL TEOREMA DI EQUIOSCILLAZIONE PER CALCOLARLO IN UN CASO SEMPLICE.

ESEMPIO $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad x\in[a,b]$ $\quad a>0$ $\quad m=1$

SIA $p_m^*(x) = a_1+a_2x$; $r(x) = f(x)-p_m^*(x) = \sqrt{x}-a_1-a_2x$

PER CALCOLARE GLI ESTREMI DI $r(x)$ ANNULLIAMO LA SUA DERIVATA PRIMA:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - a_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4a_2^2}$$

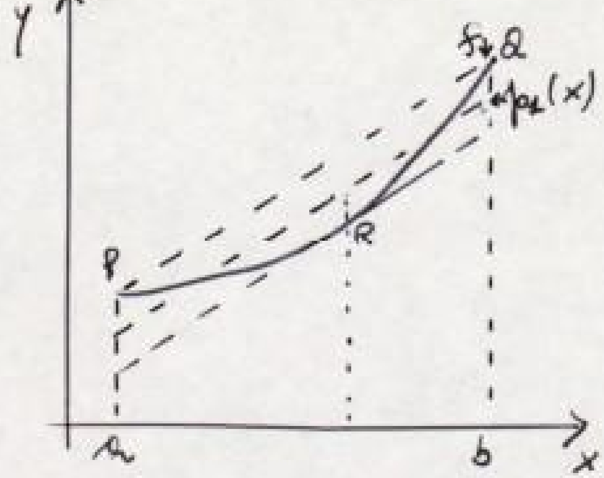
POICHE' $f'(x)$ E' MONOTONA CRESCENTE SI ANNULLA SOLO IN x.

QUINDI GLI ALTRI 2 PUNTI CRITICI SONO a E b.

SI HA QUINDI:

$$\begin{cases} \sqrt{a} - a_1 - a_2\cdot a = D \\ \dfrac{1}{2a_2} - a_1 - \dfrac{1}{4a_2^2} = -D \\ \sqrt{b} - a_1 - a_2 b = D \end{cases}$$

CHE PUO' ESSERE RISOLTO ESPLICITAMENTE.



TALE FIGURA DA' L'INTERPRETAZIONE GRAFICA DEL PROCEDIMENTO PRECEDENTE. R E' IL PUNTO IN CUI LA TANGENTE ALLA CURVA $y=f(x)$ E' PARALLELA ALLA CORDA PQ; IL GRAFICO DI $p_1(x)$ E' PARALLELA A QUESTE 2 LINEE E STA A METÀ TRA ESSI.

PER f ARBITRARIA NON $\exists$ PERO' PROCEDURE CHE DIANO TALE APPROSSIMAZIONE IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

POLINOMI DI CHEBICHEV

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$x = \cos\vartheta$$

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta)$$

REL. DI RICORRENZA.

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$\Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

ZERI: $\cos(K\vartheta_i) = 0, \quad K\vartheta_i = \frac{\pi}{2} + i\pi, \quad \vartheta_i = \frac{2i+1}{2K}\pi$

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) \qquad i = 0, \ldots, k-1.$$

TALI POLINOMI FORMANO UN SISTEMA ORTOGONALE IN $[-1, 1]$ RISPETTO ALLA FUNZIONE PESO

$$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

CIOE'

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \arccos x) \cdot \cos(n \arccos x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$