ESEMPIO DI PROBLEMA AI M.Q. DISCRETO

DISEGNARE LA RETTA CHE MEGLIO APPROSSIMA (M.Q.) I PUNTI $(0, 1), (1, 2.1), (2, 2.9), (3, 3.2)$

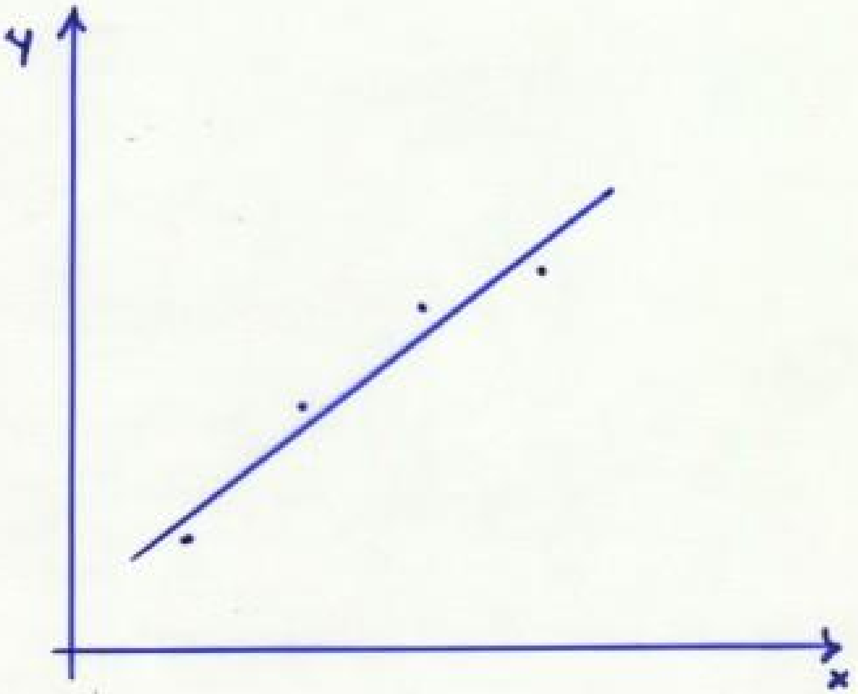
$f(0) = 1, \; f(1) = 2.1 \quad f(2) = 2.9 \quad f(3) = 3.2$

$a_0, a_1 : \quad \sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - p(x_i))^2 = \min \qquad p(x) = a_0 x + a_1$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1. \\ a_0 + a_1 &= 2.1 \\ 2a_0 + a_1 &= 2.9 \\ 3a_0 + a_1 &= 3.2 \end{aligned} \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2.1 \\ 2.9 \\ 3.2 \end{vmatrix}$$

$$A^T A x = A^T b \qquad \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17.5 \\ 9.2 \end{vmatrix}$$

$a_1 = 1.19 \quad a_0 = 0.74$



SVANTAGGI: • LA MATRICE $A^T A$ E' SPESSO MAL CONDIZIONATA
• IL METODO NON E' BUONO PER RISOLVERE IL PROBLEMA CONTINUO

SPAZI CON PRODOTTO INTERNO

LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NELLA NORMA 2 E' CORRELATA AL CONCETTO DI ORTOGONALITA' CHE SI BASA SUL PRODOTTO INTERNO.

UNA FUNZIONE A VALORI REALI $\langle \cdot , \cdot \rangle$ DEFINITA SUL PRODOTTO $V \times V$

DOVE V E' UNO SPAZIO LINEARE SUL CAMPO DEI NUMERI REALI E' DETTA PRODOTTO INTERNO SE SODDISFA A:

1) $\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \quad \forall f, g, h \in V$

2) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$

3) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad \forall f, g \in V$

4) $\langle f, f \rangle > 0 \quad f \neq 0 \quad f \in V$

ESEMPIO. $\mathbb{R}^n$ E' UNO SPAZIO CON P.I. CON:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \ \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \quad \Updownarrow \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y}$$

DEFINIZIONE SIA V UNO SPAZIO A P.I. ED $f, g \in V$: $\underline{\langle f, g \rangle = 0}$ DIREMO CHE f E' ORTOGONALE A g.

DEFINIZIONE SIA V UNO SPAZIO A P.I. $f \in V$ DIREMO

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad \text{NORMA INDOTTA.}$$

LA PROVA CHE QUESTA ESPRESSIONE SIA EFFETTIVAMENTE UNA NORMA SI BASA SULLA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. $|\langle f, g \rangle| \le \|f\| \|g\| \quad \forall f, g \in V$

TEOREMA UNO SPAZIO A P.I. V SUL CAMPO $\mathbb{R}$ CON NORMA INDOTTA E' UNO SPAZIO LINEARE NORMATO SU $\mathbb{R}$.

ESEMPIO. $C[a,b]$ E' UNO SPAZIO A P.I. CON:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) \, dx$$

CON $w(x)$ FUNZIONE PESO, POSITIVA, CONTINUA E INTEGRABILE IN (a,b).

LA NORMA INDOTTA E' DATA DA:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx}$$

N.B. NON E' NECESSARIA LA CONTINUITA' DI f IN $[a,b]$ PERCHE' $\|f\|_2$ SIA FINITA. AD ES.: $f(x) = \operatorname{sign}(x - \frac{1}{2}(a+b))$ $x \in [a,b]$ HA $\|f\|_2 < \infty$ MA f E' DISCONTINUA IN $x = \frac{1}{2}(a+b)$

PERTANTO, PER SVILUPPARE UNA TEORIA IL CUI RANGE DI APPLICABILITA' VADA OLTRE LO SPAZIO LINEARE DELLE FUNZIONI CONTINUE SU $[a,b]$, DENOTIAMO CON $L^2_w(a,b)$ L'INSIEME DELLE FUNZIONI f A VALORI REALI DEFINITE SU (a,b) TALI CHE $w(x)|f(x)|^2$ SIA INTEGRABILE SU (a,b)

$L^2_w(a,b)$ E' QUINDI CON P.I. E NORMA 2 INDOTTA.

$C[a,b]$ E' UN SOTTOINSIEME PROPRIO DI $L^2_w(a,b)$.

SE $w(x) \equiv 1$ ALLORA AVREMO $L^2(a,b)$

MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NELLA NORMA 2

IL PROBLEMA CONTINUO OVVERO LA M.A. NELLA NORMA 2 E':

DATO $f \in L^2_w(a,b)$ TROVARE $p_m \in \mathcal{P}_m$ TALE CHE:

$$\|f - p_m\|_2 = \inf_{q \in \mathcal{P}_m} \|f - q\|_2$$

p_m E' DETTO POLINOMIO DI M.A. NELLA NORMA 2 DI GRADO m AD f IN (a,b).

SI PUO' DIMOSTRARE CHE IN UNO SPAZIO A P.I. TALE M.A. ESISTE ED E' UNICA.

VEDIAMO ALLORA COME TROVARE TALE M.A. NEL CASO GENERALE E IN UN CASO PARTICOLARE

SIA V UNO SPAZIO A P.I. (ES.: $V = L^2[0,1]$ OPPURE $V = C[0,1]$)

E $W \subseteq V$ UNO SPAZIO A DIMENSIONE FINITA : $\dim W = m+1$

(ES.: $W = \mathcal{P}_m$). SIA $W = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$

(span: $\forall f \in W$, $f = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i$) SI HA:

TEOREMA PER $\forall f \in V$, $w^* = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i$ E' LA M.A.

NEL SENSO DEI M.Q. E I COEFFICIENTI a_i SONO DATI DA:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle \quad k = 0, \ldots, m$$

TALE SISTEMA E' DETTO DELLE **EQUAZIONI NORMALI**.

DIM. DIMOSTRIAMO NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $V = C[a,b]$.

$w(x) = 1$, SIA $f \in C[a,b]$. VOGLIAMO TROVARE $p(x) \in \mathcal{P}_m$:

$$\int_a^b \left(f(x) - p(x)\right)^2 dx = \text{minimo}.$$

SIA $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$

DEFINIAMO UNA FUNZIONE F DEI COEFFICIENTI a_i:

$$F(a_0, \ldots, a_m) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{j=0}^{m} a_j x^j\right)^2 dx$$

C.N. PER IL MINIMO: $\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad i = 0, \ldots, m$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{m} a_j \int_a^b x^{i+j} dx = \int_a^b f(x) x^i dx \qquad \blacksquare$$

SE $[a,b]=[0,1]$ LA SOL. E' DATA DA:

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{i+j+1} = \int_0^1 f(x)\, x^i\, dx$$

LA MATRICE $H = \left[\frac{1}{i+j+1}\right]$ $i,j=0,..,m$ E' LA

MATRICE DI HILBERT

$$H = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

COME E' NOTO TALE MATRICE E' QUASI SINGOLARE PER m CRESCENTE CIOE' E' MAL CONDIZIONATA.

m	$K_2(H_m)$
5	$4.8 \cdot 10^{5}$
10	$1.6 \cdot 10^{13}$
15	$6.1 \cdot 10^{20}$
20	$2.5 \cdot 10^{28}$
25	$1.0 \cdot 10^{36}$

$$K_2(H_m) = \|H_m\|_2 \cdot \|H_m^{-1}\|_2$$

PERTANTO LA SOL. DEL SISTEMA DI EQS. NORMALI PERDE RAPIDAMENTE ACCURATEZZA A CAUSA DELL'ACCUMULARSI DELL'ERRORE DI ARROTONDAMENTO.

SI DOVRA' QUINDI CERCARE UN METODO ALTERNATIVO.

TALE METODO SI BASA SULL'USO DEI POLINOMI ORTOGONALI.

(17)

POLINOMI ORTOGONALI

PER EVITARE CHE LE EQS. ORTONORMALI ABBIANO UNA MATRICE DIFFICILE DA INVERTIRE, ESPANDIAMO p_m CON UNA BASE DIFFERENTE SCELTA IN MODO CHE LA MATRICE RISULTANTE SIA DIAGONALE.

DEFINIZIONE DATA UNA FUNZIONE PESO $w(x)$, POSITIVA, CONTINUA E INTEGRABILE SU (a,b), DICIAMO CHE LA SUCCESSIONE DI POLINOMI φ_j, $j=0,1,..$ FORMA UN **SISTEMA DI POLINOMI ORTOGONALI** SU (a,b) RISPETTO A w, SE OGNI φ_j DI GRADO j E' TALE CHE:

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_a^b w(x)\varphi_k(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \forall k \neq j \\ \neq 0 & k = j \end{cases}$$

IN PARTICOLARE, SE $\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 1$ I POLINOMI SI DICONO **ORTONORMALI**. IN TAL CASO, DALLA COSTRUZIONE VISTA IN PRECEDENZA, SI HA:

$$a_i = \langle f, \varphi_i \rangle = \int_a^b w(x) f(x) \varphi_i(x)\,dx \qquad i=0,..,n$$

TEOREMA $\varphi_0, \varphi_1, .., \varphi_m$. $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

$\Rightarrow$ LINEARMENTE INDIP. CIOE' FORMANO UNA **BASE**.

VICEVERSA: DATI n POLINOMI LIN. INDIP. E' POSSIBILE TROVARE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE PER CUI ESSI RISULTINO ORTOGONALI.

TEOREMA $p \in \Pi_n [a,b]$ HA n ZERI, REALI, DISTINTI ED INTERNI AD $[a,b]$.

Dim.

$$n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \quad \int_{[a,b]} p_i p_j = 0 \quad i \neq j \quad I = [a,b]$$

$p_n(x)$ NON HA SEGNO COSTANTE IN I, ALTRIMENTI SI AVREBBE

$$\int_I p_n(x) p_0(x) dx \neq 0$$

PER IL T. DI $\exists$ DEGLI ZERI $\exists$ UNO ZERO IN $\mathring{I}$.

SIA ESSO x_1 E SUPPONIAMOLO DI MOLTEPL. ALMENO 2.

$$\Rightarrow r(x) = p_n(x) / (x-x_1)^2 \in \mathcal{P}_{n-2}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_I r(x) p_n(x) = \int_I \frac{p_n^2(x)}{(x-x_1)^2} \neq 0 \quad \text{ASSURDO.}$$

ALLORA GLI ZERI SONO SEMPLICI. SIANO $m < n$

$$p_n(x)[(x-x_1) \cdots (x-x_m)] = r(x)[(x-x_1)^2 \cdots (x-x_m)^2]$$

CON $r(x) \in \mathcal{P}_{n-m}$ DI SEGNO COSTANTE IN I.

$$0 = \int_I p_n(x) [\underbrace{(x-x_1) \cdots (x-x_m)}_{\in \mathcal{P}_{m<n}}] = \int_I r(x)[(x-x_1)^2 \cdots (x-x_m)^2] \neq 0$$

$$\Rightarrow m = n.$$

∎

PROCEDIMENTO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

L'INSIEME $S = \{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ FORMA UNA BASE PER $\mathcal{P}_m$

ESSI PERO' NON SONO ORTOGONALI RISPETTO A NESSUN PRODOTTO INTERNO.

PONIAMO $\boxed{q_0(x) \equiv 1}$ E DEFINIAMO: $\boxed{p_0(x) = \frac{q_0(x)}{\|q_0\|}}$

N.B. $\|q_0\| \neq 1$ INFATTI: $\int_{-1}^{1} q_0^2(x)\,dx = \|q_0\|^2 \Rightarrow \|q_0\| = \sqrt{2}$

PER $k = 1, \dots, m$ PONIAMO:

$$\boxed{q_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle x^k, p_j \rangle p_j(x)} \quad , \quad \boxed{p_k(x) = \frac{q_k(x)}{\|q_k\|}}$$

ALLORA SEGUE CHE: $\{q_k(x)\}_{k=0}^{m}$ SONO ORTOGONALI

$\{p_k(x)\}_{k=0}^{m}$ SONO ORTONORMALI

ESEMPIO $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\,dx \qquad f, g \in L^2[-1,1]$

$S = \{1, x, x^2\}$

$q_0(x) = 1 \qquad p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$q_1(x) = x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x \qquad p_1(x) = \frac{x}{\|x\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

$q_2(x) = x^2 - \langle x^2, p_0 \rangle p_0(x) - \langle x^2, p_1 \rangle p_1(x) = \qquad p_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

$= x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\langle x^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x \rangle}_{= 0} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x = x^2 - \frac{1}{3}$

INFATTI: $\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} x = 0$, $\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\|x^2 - \frac{1}{3}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2}$

CALCOLO EFFICIENTE DEI POLINOMI ORTOGONALI

IL PROCEDIMENTO DI G.S. PUO' ESSERE ONEROSO PERSINO PER PICCOLI n. ($p_{10}(x)$ NECESSITA $p_j(x)$ $0 \le j \le 9$).

SI HA INVECE UNA FORMULA DI RICORRENZA

SIA DEFINITO UN P.I.

$$<f, g> = \int_I f(x)\, g(x)\, dx$$

$p_n(x)$ SIA ORTOGONALE RISPETTO A TALE P.I.

SIA:

$$p_n(x) = a_n x^n + \dots$$
$$p_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

PONIAMO:

$$A_n = \frac{a_n}{b_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad p_n(x) - A_n x\, p_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$$

$\Rightarrow \exists\ n$ COSTANTI λ_i:

$$p_n(x) - A_n x\, p_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, p_i(x)$$

MOLTIPLICHIAMO PER $p_r(x)$ ED INTEGRIAMO.