APPROSSIMAZIONE

- FUNZIONE NOTA IN ALCUNI PUNTI $\longrightarrow$ INTERPOLAZIONE
- APPROSSIMAZIONE CON FUNZIONE PIÙ SEMPLICE $\longrightarrow$ MINIMIZZAZIONE ERRORE (MIN.QUAD. - MINMAX)

OBIETTIVO TROVARE UN POLINOMIO DI GRADO m CHE DIA LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE AD f IN UN SENSO DA SPECIFICARE.

DIREMO CHE $g(x)$ APPROSSIMA $f(x)$: $g(x) \sim f(x)$ SE: $\| f-g \|$ "PICCOLA".

RICHIAMIAMO IL CONCETTO DI NORMA

SIA V UNO SPAZIO LINEARE SU $\mathbb{R}$ UNA NORMA $\|\cdot\|$ SU V E' UNA FUNZIONE NON NEGATIVA DEFINITA SU V :

1) $\| f \| = 0 \iff f = 0, \; f \in V$

2) $\| \lambda f \| = |\lambda| \, \| f \|, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall f \in V$

3) $\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \| \quad \forall f, g \in V$

UNO SPAZIO LINEARE SIFFATTO E' DETTO NORMATO.

- $V = \mathbb{R}^n$ NORME VETTORIALI 1, 2, ∞

$$\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

POICHE' VALGONO LE SEGUENTI DISUGUAGLIANZE:

$$(1/\sqrt{n})\|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \sqrt{n}\,\|v\|_\infty \quad \forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

TALI NORME SONO INTERCAMBIABILI.

- $V = C[a,b]$

SIA $w(x)$ UNA FUNZIONE A VALORI REALI, CONTINUA E INTEGRABILE IN $[a,b]$. ESSA E' DETTA FUNZIONE PESO.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, w(x)\, dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 w(x)\, dx}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

TALI NORME NON SONO EQUIVALENTI. INFATTI SI HA IL SEGUENTE LEMMA.

LEMMA

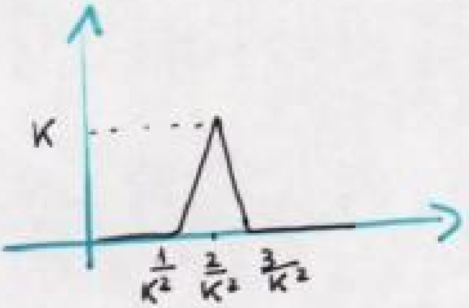
- $\|f\|_2 \le W \|f\|_\infty \quad , \quad W = \sqrt{\int_a^b w(x)\,dx} \quad \forall f \in C[a,b]$

- DATI 2 NUMERI POSITIVI ε (PICCOLO) ED M (GRANDE), $\Rightarrow \exists\, f \in C[a,b]$:

$$\|f\|_2 < \varepsilon \quad , \quad \|f\|_\infty > M$$

TALE NON EQUIVALENZA RENDE LA TEORIA MINMAX DIVERSA DA QUELLA MINQUAD.

TALE ESEMPIO MOSTRA IN MODO PRATICO LA NON EQUIVALENZA DI QUESTE NORME.



$$f_K(x) = \begin{cases} K(K^2x-1); & \frac{1}{K^2} \le x \le \frac{2}{K^2} \\ -K(K^2x-3); & \frac{2}{K^2} \le x \le \frac{3}{K^2} \\ 0; & - \end{cases}$$

$$f(x) = 0$$

$$\|f - f_K\|_1 = \frac{1}{K} \quad ; \quad \|f - f_K\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \|f - f_K\|_\infty = K$$

$$\lim_{K\to\infty} \text{''} = 0 \quad ; \quad \lim_{K\to\infty} \text{''} = \text{''} \quad ; \quad \lim_{K\to\infty} \text{''} = \infty$$

TEORIA GENERALE

SIA V UNO SPAZIO LINEARE NORMATO

$W \subset V$; $\dim W = n$, ϕ_i $i=1,n$ lin. indip.

DIREMO CHE $w^* \in W$ E' LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE

AD $f \in V$ SE:

$$\| f - w^* \| \leq \| f - w \| \quad \forall w \in W$$

PROBLEMI: 1) $\exists\, w^*$? 2) E' UNICA ? 3) COME SI COSTRUISCE?

1) $\exists$ IN UNO SPAZIO LINEARE NORMATO

2) UNICITA' GARANTITA IN UNO SPAZIO A PRODOTTO INTERNO

3) COSTRUZIONE MIN QUAD $\| \cdot \|_2$ $\Rightarrow$ # FINITO DI PASSI

" MIN MAX $\| \cdot \|_\infty$ $\Rightarrow$ PROCEDIMENTO ITERATIVO

NONOSTANTE LE DIFFERENZE DELLE NORME C'E' UNA CARATTERISTICA COMUNE DELL'APPROSSIMAZIONE INDIPENDENTE DALLE NORME: SE NON C'E' UN LIMITE SUL GRADO DEL POLINOMIO APPROSSIMANTE p, ALLORA L'ERRORE $f-p$ PUO' ESSERE RESO ARBITRARIAMENTE PICCOLO IN ENTRAMBE LE NORME.

TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.

$$f \in C[a,b], \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathcal{P}_n : \quad \|f-p\|_\infty \leq \varepsilon$$

ANALOGO RISULTATO SI HA NELLA NORMA 2.

D'ALTRONDE, SE n E' FISSATO IL TEOREMA NON VALE PIU'.

PER ES.: $f(x) = \sin x \quad x \in [0,\pi]$ E SIA $n=0$.

$$\Rightarrow \|f-q\|_\infty \geq \tfrac{1}{2} \quad \forall q \in \mathcal{P}_0.$$

PROBLEMA: DATA L'ACCURATEZZA DELL'APPROSSIMAZIONE CALCOLARE IL POLINOMIO COL PIU' BASSO GRADO POSSIBILE.

MINIMI QUADRATI

1) PROBLEMA DISCRETO: DATI I PUNTI $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$

$m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$ TROVARE $p^*(x) \in \mathcal{P}_n$:

$$\sum_{i=0}^{m} w_i \left[p^*(x_i) - y_i \right]^2 \quad \text{SIA MINIMO}$$

CON $w_0, \dots, w_m$ COSTANTI POSITIVE DETTE PESI.

2) PROBLEMA CONTINUO: DATA $w(x)$ CONTINUA E POSITIVA IN $[a,b]$

TROVARE $p^*(x) \in \mathcal{P}_n$:

$$\int_a^b w(x) \left[p^*(x) - f(x) \right]^2 dx \quad \text{SIA MINIMO}$$

IL PROBLEMA 1) E' EQUIVALENTE A TROVARE LA SOLUZIONE AI MINIMI QUADRATI DI UN SISTEMA LINEARE SOVRADETERMINATO.

VEDIAMO QUAL E' LA CONNESSIONE TRA IL PROBLEMA DISCRETO AI M.Q. CIOE' LA RICERCA DI $p^*(x)$ CHE MINIMIZZI LA SOMMA VISTA PRIMA E LA SOLUZIONE AI M.Q. DI UN SISTEMA SOVRADETERMINATO.

SIA $p^*(x) \in \mathbb{P}_n$ E SIA $1, t, t^2, .., t^n$ UNA BASE DI $\mathbb{P}_n$. SIA $m > n$. IL POLINOMIO CERCATO SARA' DEL TIPO:

$$p^*(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j t^j \qquad x_j \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad p^*(t_i) = \sum_{j=0}^{n} x_j t_i^j \qquad i = 0, .., m$$

PONENDO $t_i^j = a_{ij} \Rightarrow p^*(t_i) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j$

$$\Updownarrow$$

$$Ax = b$$

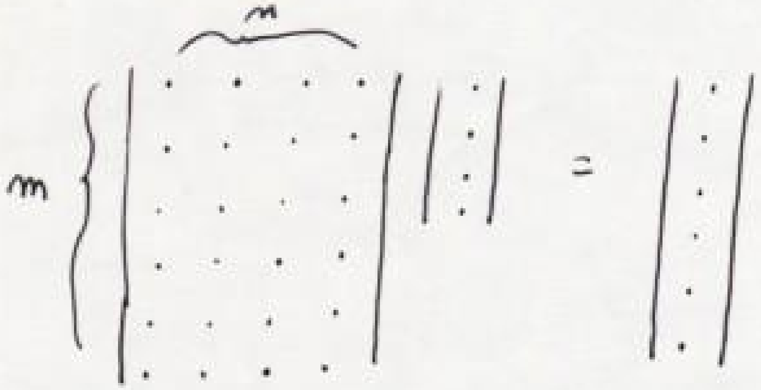
$$A = [a_{ij}], \quad x = [x_0, .., x_n]^T, \quad b = [y_0, .., y_m]^T$$

CHE E' UN SISTEMA LINEARE SOVRADETERMINATO.

SOLUZIONE AI M.Q. DI UN SISTEMA LINEARE SOVRADET.

SIA : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$

CI CHIEDIAMO : $\exists\, x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$?



A x

SIA $\mathcal{R}(A)$ LO SPAZIO DEFINITO DA:

$$\mathcal{R}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : \exists\, x \in \mathbb{R}^n : Ax = y \}$$

$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$

SI POSSONO AVERE I SEGUENTI CASI:

$$b \in \mathcal{R}(A) \quad \begin{cases} \operatorname{rank}(A) = n & \exists\, 1 \text{ SOL.} \\ \operatorname{rank}(A) < n & \infty \text{ SOL.} \end{cases}$$

$$b \notin \mathcal{R}(A) \qquad \nexists \text{ SOL.}$$

IN TAL CASO DETERMINIAMO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|A\bar{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E' LA SOL. DI :

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E' LA SOLUZIONE AI MINIMI QUADRATI DI $Ax = b$

NEL SENSO CHE $\bar{x}$ RENDE MINIMA LA SOMMA DEI QUADRATI

DELLE COMPONENTI DEL VETTORE RESTO $R = Ax - b$

CIOE' CERCHIAMO $R^T R =$ minimo.

PER FAR VEDERE CHE LA SOL. E' DATA DA: $A^T A x = A^T b$

SIA $m = 3$, $n = 2$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 = b_3 \end{cases}$$

SIA $\underline{R} = (r_1, r_2, r_3)^T$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - b_1 = r_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - b_2 = r_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 - b_3 = r_3 \end{cases}$$

$\underline{x} = (x_1, x_2)$ SIA TALE CHE $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 =$ minimo.

MA: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) x_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) x_2^2 +$

$+ 2 (a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32}) x_1 x_2 - 2 (a_{11} b_1 + a_{21} b_2 + a_{31} b_3) x_1$

$- 2 (a_{12} b_1 + a_{22} b_2 + a_{32} b_3) x_2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

PERCHE' SI ABBIA IL MINIMO SIANO NULLE LE DERIVATE

RISPETTO AD x_1, x_2.

PONENDO $(a_i, a_j) = a_{1i} \cdot a_{1j} + \dots + a_{mi} \cdot a_{mj}$

SI OTTIENE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} (a_1, a_1)x_1 + (a_1, a_2)x_2 = (a_1, b) \\ (a_2, a_1)x_1 + (a_2, a_2)x_2 = (a_2, b) \end{cases}$$

TALE SISTEMA, IN FORMA MATRICIALE, E':

$$A^T A x = A^T b$$

- — -

ESEMPIO DI SISTEMA LINEARE SOVRADETERMINATO.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^T A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A^T b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ 10 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{23}{7} \qquad x_2 = \frac{8}{7}$$