UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2010-2011
Prova scritta di **Analisi Matematica II (15 CFU)**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica)
Prima sessione - I appello - 3 Febbraio 2011

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Dopo aver determinato l'insieme X di esistenza della funzione:

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2-2x-2y+2\right),$$

trovare
i) l'insieme degli zeri di f;
ii) il sottoinsieme di X dove f è positiva (negativa);
iii) gli estremi superiore ed inferiore di f;
iv) gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi di f;
v) i punti di massimo e di minimo assoluti della restrizione di f all'insieme $Y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1 - \sqrt{2x-x^2}\,\right\}$.

II

Detto T il triangolo di vertici: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4},0)$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, calcolare i seguenti tre integrali doppi:

$$\iint_T x\,dxdy\ , \quad \iint_T x\,\mathrm{sen}^2\,y\,dxdy\ , \quad \iint_T x\cos^2 y\,dxdy$$

e mostrare che

$$\iint_T x\,dxdy = \iint_T x\,\mathrm{sen}^2\,y\,dxdy + \iint_T x\cos^2 y\,dxdy\,.$$

III

Siano D il cerchio chiuso di $\mathbb{R}^2$ di centro il punto $(1,1)$ e raggio $\frac{1}{2}$ ed S la superficie di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + \sqrt{2u+2v-u^2-v^2-1} \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in D\,.$$

Provare la regolarità della superficie S e calcolarne l'area.

IV

Trovare la funzione reale $\varphi(x)$ soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' = y + x^2 - 1 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,,\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

e tracciarne il grafico.