SVOLGIMENTO DEI COMPITI DEL 19 FEBBRAIO 2008

Esercizio 1 Compito A
Scriviamo la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e la matrice incompleta } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango della matrice incompleta A.
La matrice seguente estratta da A

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinate uguale a 1 quindi $\mathrm{rk}(A) \geq 2$. Studiamo gli orlati di M. Un orlato è:

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale -6, pertanto si conclude che $\mathrm{rk}(A) = 3$, e necessariamente anche $\mathrm{rk}(C) = 3$. Per il Teorema di Rouché Capelli, essendo $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(C) = 3$ il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.

Eliminando le righe che non hanno contribuito alla determinazione del rango di A e portando al secondo membro le colonne che non hanno contribuito alla determinazione del rango di A si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + +3y + 2z = 2 \\ y - 2z = -1 + t \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Utilizzando la Regola di Cramer otteniamo le soluzioni

$$\Big(\frac{3-t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{3-2t}{6}, t\Big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Compito A
Uno fra i diversi modi di risolvere questo esercizio è il seguente.

Un vettore ortogonale alla I bisettrice è $v = (1, -1)$, pertanto un vettore ortogonale a v è $v_\perp = (-1, -1)$ e la retta passante per $A = (2, 2)$ e ortogonale alla prima bisettrice ha equazione:

$$-1(x-2) - 1(y-2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad x + y - 4 = 0.$$

Tale retta contiene, per note proprietà geometriche sulla circonferenza, il centro C, che appartiene pure all'asse $\vec{x}$. Quindi

$$C : \begin{cases} y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

che risolto dà: $C = (4, 0)$. Il raggio vale $\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{(4-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$ dunque l'equazione della circonferenza è: $(x-4)^2 + (y-0)^2 = 8$.

Esercizio 3 Compito A

Per determinare il simmetrico Q di P_0 rispetto alla retta r, occorre conoscere la sua proiezione ortogonale su r. Tale proiezione si determina conoscendo il piano passante per P_0 e ortogonale alla retta r. Un vettore parallelo alla retta r si ottiene dal prodotto vettoriale dei vettori di componenti $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$ rispettivamente ortogonali ai piani $x-y=0$ e $y-z=0$

$$v \wedge v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1),\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right) = (1,1,1).$$

Pertanto l'equazione del piano è:

$$\alpha:\ 1(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0 \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha:\ x+y+z-3=0;$$

la proiezione ortogonale di p_0 su r è data risolvendo il sistema tra la retta r e il piano α:

$$P_0^{\perp}:\ \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=y \\ y=z \end{cases}$$

che dà il punto $P_0^{\perp}=(1,1,1)$.

Dalle formule del punto medio di un segmento (osservando che proprio $P_0^{\perp}$ è il punto medio del segmento i cui estremi sono P_0 e il simmetrico di P_0 rispetto a r) otteniamo il punto simmetrico $Q=(1,0,2)$.

Esercizio 4 Compito A

Poiché bisogna dare senso alla radice quadrata il radicando deve essere non negativo, il radicando, essendo un logaritmo deve avere il suo argomento positivo, ed infine, l'argomento del logaritmo, essendo una frazione, ha senso solo se il denominatore non si annulla:

$$\text{C.E.} = \left\{ x \in \mathbb{R}\ :\ \log_2\left(\frac{5-x^2}{2x-1}\right) - 2 \geq 0;\ ;\frac{5-x^2}{2x-1} > 0;\ 2x-1 \neq 0 \right\}$$

Ovvero bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{5-x^2}{2x-1}\right) - 2 \geq 0 \quad \to \log_2\left(\dfrac{5-x^2}{2x-1}\right) \geq 2 \\ \dfrac{5-x^2}{2x-1} > 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases}$$

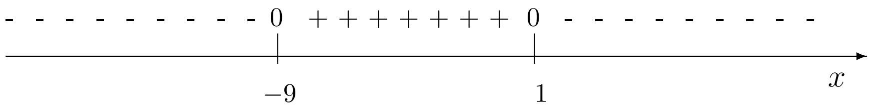
ricordando che ogni numero reale k si può scrivere come logaritmo di base qualsiasi numero positivo a diverso da 1, allora: $k = k \cdot 1 = k \log_a a = \log_a a^k$, allora $2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$, quindi il sistema precedente è equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{5-x^2}{2x-1} \geq 4 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases}$$

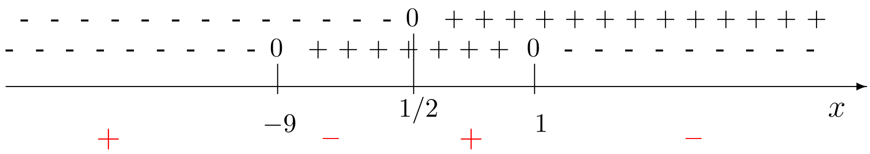
Risolviamo la disequazione. Risulta:

$$\frac{5-x^2}{2x-1} - 4 \geq 0; \qquad \frac{-x^2-8x+9}{2x-1} \geq 0$$

per risolvere la disequazione occorre studiare il segno del numeratore e denominatore. Per quanto riguarda il numeratore, poiché il $\Delta/4$ del polinomio al numeratore è 25, l'equazione associata ammette due soluzioni: $x_1 = -9$ e $x_2 = 1$, il coefficiente di x^2 è negativo, pertanto il segno del polinomio è:



Studiamo adesso il segno del denominatore. L'equazione associata al polinomio di primo grado è $2x - 1 = 0$ la cui soluzione è $x = 1/2$, poiché il coefficiente della x è positivo allora il grafico di segno, riportato sul grafico precedente, è:



pertanto la soluzione della disequazione, e quindi il campo di esistenza, è: $x \leq -9$; $1/2 < x \leq 1$.

Esercizio 5 Compito A

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Per scrivere tale retta ci occorre innanzitutto conoscere l'immagine di $x_0 = 1$ tramite la legge: $f(x) = \arctan(-x^2 - \sqrt{3}x + 1)$ ovvero:

$$f(1) = \arctan(-(1)^2 - \sqrt{3}(1) + 1) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3;$$

occorre poi conoscere il valore della derivata prima di $f(x)$ in $x_0 = 1$. Calcoliamo la derivata della funzione (osserva che è la derivata di una funzione composta):

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left[\arctan(-x^2 - \sqrt{3}x + 1)\right] &= \underset{y=-x^2-\sqrt{3}x+1}{\mathrm{D}\left[\arctan(y)\right]} \cdot \mathrm{D}\left[-x^2 - \sqrt{3}x + 1\right] \\ &= \left[\frac{1}{1+y^2}\right]_{y=-x^2-\sqrt{3}x+1} \cdot (-2x - \sqrt{3}) = \frac{-2x - \sqrt{3}}{1 + (-x^2 - \sqrt{3}x + 1)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\underset{x_0=1}{\mathrm{D}}\left[\arctan(-x^2 - \sqrt{3}x + 1)\right] = \frac{-2(1) - \sqrt{3}}{1 + (-(1)^2 - \sqrt{3}(1) + 1)^2} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{4}$$

dunque l'equazione della retta tangente è:

$$y = \frac{-2 - \sqrt{3}}{4}(x - 1) - \pi/3.$$

Esercizio 6 Compito A

Per un errore di battitura, la funzione doveva essere un'altra. Comunque studiamo la funzione data.

Il campo di esistenza è $]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$, in quanto per $x=-3$ il denominatore dell'esponente si annulla. Vediamo dove è continua la funzione $f(x)$. I punti dove porre attenzione sono $x=-3$ (dove però la funzione NON è definita) e $x=2$ dove è presente il cambio di legge, in tutti gli altri punti del dominio la funzione risulta essere continua e derivabile.

Poiché

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+4}{(x+3)^2}=+\infty$$

risulta

$$\lim_{x\to-3}\mathrm{e}^{\frac{x+4}{(x+3)^2}}=+\infty$$

dunque in $x=-3$ la funzione presenta una discontinuità di seconda specie.

Inoltre $f(2)=\mathrm{e}^{6/25}$ mentre

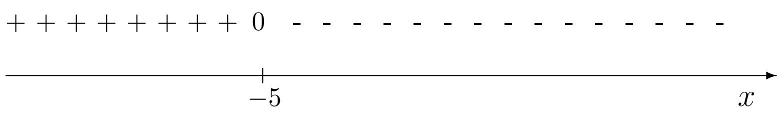
$$\lim_{x\to2^+}\log_2\frac{x^2+6x+12}{x^2+6x+7}=\log_2\frac{28}{23}$$

dunque $f(x)$ presenta una discontinuità di prima specie in $x=2$.

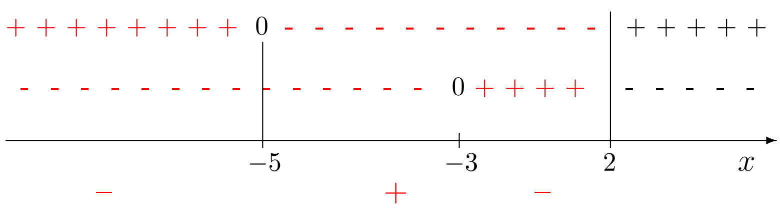
Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$. Per $x<2$ e $x\neq-3$ risulta

$$f'(x)=\frac{(x+3)^2-(x+4)(2)(x+3)(1)}{(x+3)^4}\,\mathrm{e}^{\frac{x+4}{(x+3)^2}}=\frac{-x-5}{(x+3)^3}\,\mathrm{e}^{\frac{x+4}{(x+3)^2}}$$

poiché l'esponenziale è sempre positivo, il segno della $f'(x)$ è dato dal segno della frazione. Studiamo quindi il segno del numeratore $-x-5$ e del denominatore $(x+3)^3$. L'equazione associata al polinomio di primo grado $-x-5$ ammette la soluzione $x=-5$, il coefficiente della x è negativo pertanto si ha il seguente grafico di segno:



Studiamo adesso il segno del denominatore $(x+3)^3$. Essendo una potenza di grado dispari il segno è detreminato da quello della base, quindi da quello del polinomio $x+3$. L'equazione associata al polinomio di primo grado $x+3$ ammette la soluzione $x=-3$, il coefficiente della x è positivo pertanto si ha il seguente grafico di segno che riportiamo nel precedente:

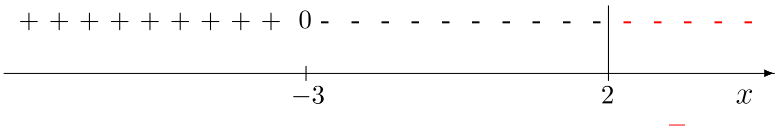


(In rosso la parte che ci interessa). Dal prodotto dei segni del numeratore e denominatore, ricordando che stiamo studiando la funzione per $x<2$, si ha:
$f(x)$ è crescente per $-5<x<-3$, mentre è decrescente per $x<-5$ e per $-3<x<2$, mentre $x=-5$ è ascissa di minimo relativo.

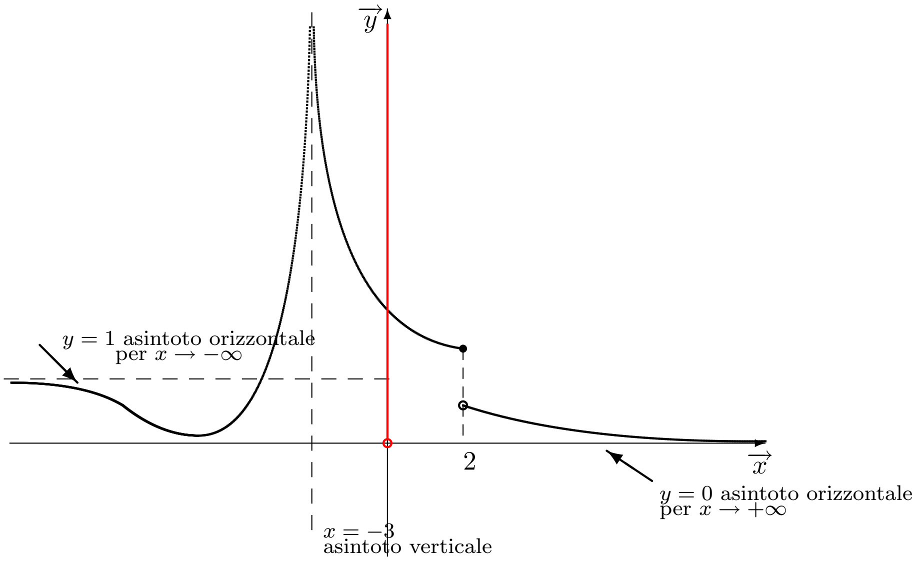
Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$ per $x > 2$ risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+6x+12}{x^2+6x+7}} \cdot \frac{(2x+6)(x^2+6x+7) - (2x+6)(x^2+6x+12)}{(x^2+6x+7)^2} \log_2 \mathrm{e}$$
$$= \frac{x^2+6x+7}{x^2+6x+12} \cdot \frac{-5(2x+6)}{(x^2+6x+7)^2} \log_2 \mathrm{e}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ per $x > 2$. Non abbiamo eseguito alcuna semplificazione proprio perché il primo fattore essendo l'inverso dell'argomento di un logaritmo, nel suo campo di esistenza è sempre positivo, il secondo fattore ha il denominatore che è un quadrato il quale per $x > 2$ non si annulla quindi è positivo, pertanto il segno è determinato dal segno del solo numeratore:$-10x - 30$. Tale polinomio di primo grado ammette l'unica radice $x = -3$, e poiché il coefficiente della x è negativo, allora il grafico di segno è il seguente:



(In rosso la parte che ci interessa). Dunque la funzione $f(x)$ è sempre decrescente in $]2, +\infty[$. Dai risultati finora ottenuti possiamo dedurre che un grafico approssimato della funzione è il seguente:



in rosso abbiamo indicato il codominio (Insieme delle Immagini) della funzione, cioé l'intervallo $]0; +\infty[$, pertanto gli estremi della funzione sono:

$$\inf f(x) = 0; \qquad \text{e} \qquad \sup f(x) = +\infty$$

Esercizio 1 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 1 Compito A**.

Esercizio 2 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 2 Compito A**.

Esercizio 3 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 3 Compito A**.

Esercizio 4 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 4 Compito A**.

Esercizio 5 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 5 Compito A**.

Esercizio 6 Compito B
Proviamo che la funzione è continua anche in $x = -1$. Calcoliamo:

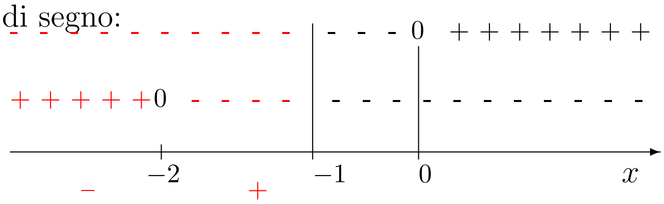
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = \mathrm{e}^0 = 1; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log_2 \frac{x^2}{x^3+1} = \log_2 2 = 1$$

dunque $f(x)$ è continua anche in $x = -1$.

Calcoliamo adesso la derivata prima di $f(x)$. Per $x < -1$ si ha:

$$f'(x) = \underset{y=\frac{x+1}{x^2}}{\mathrm{D}[\mathrm{e}^y]} \cdot \mathrm{D}\left[\frac{x+1}{x^2}\right] = \frac{-x^2-2x}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{-x-2}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x^2}}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ in $x < -1$. Studiamo il segno del numeratore. È un polinomio di primo grado, la cui equazione associata è $-x-2 = 0$ che dà luogo alla soluzione: $x = -2$. Poiché il segno del coefficiente della x è negativo allora si ha il seguente grafico di segno:

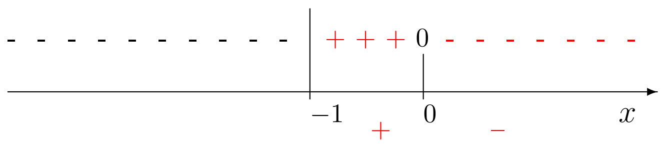


(In rosso la parte che ci interessa). Quindi $f(x)$ è crescente in $-2 < x < -1$, mentre è decrescente in $x < -2$ pertanto $x = -2$ è punto di minimo relativo.

Calcoliamo, ora, la derivata prima di $f(x)$ per $x > -1$. Risulta:

$$f'(x) = (\log_2 e)\frac{1}{\frac{x^2+3}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = (\log_2 e)\frac{x^2+1}{x^2+3} \cdot \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ in $x > -1$. Poiché il primo fattore è l'inverso dell'argomento del logaritmo, allora (all'interno del proprio campo di esistenza) è sempre positivo. In $x < -1$ il denominatore del secondo fattore, essendo un quadrato, è positivo quindi il segno di $f'(x)$ è determinato da quello del numeratore: $-4x$. Dal fatto che l'equazione associata al polinomio $-4x$ ammette la soluzione $-4x = 0 \to x = 0$ e poiché il coefficiente di x è negativo, otteniamo il seguente grafico:



(In rosso la parte che ci interessa). Quindi in $x > -1$ $f(x)$ è crescente in $-1 < x < 0$ e decrescente in $x > 0$ e $x = 0$ è punto di massimo relativo.

Poiché:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-x^2-2x}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} (\log_2 e)\frac{x^2+3}{x^2+1}\frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 1/2(\log_2 e)$$

concludiamo che NON esiste $f'(-1)$.

Vediamo il comportamento agli estremi del C.E.

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x^2}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

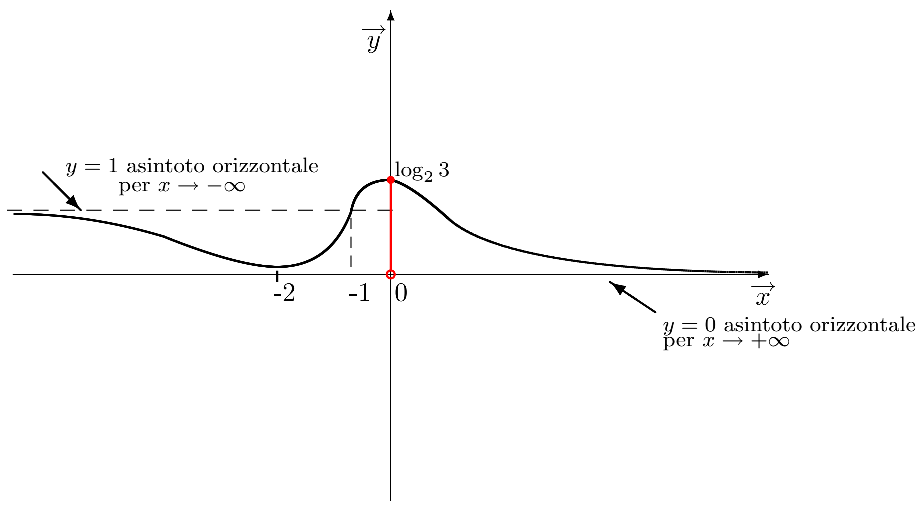
pertanto la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log_2 \frac{x^2+3}{x^2+1} = \log_2 1 = 0$$

pertanto la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Dai risultati finora ottenuti possiamo dedurre che un grafico approssimato della funzione è il seguente:



in rosso abbiamo indicato il codominio (Insieme delle Immagini) della funzione, cioé l'intervallo $]0; \log_2 3]$, e quindi gli estremi della funzione sono:

$$\inf f(x) = 0; \qquad \text{e} \qquad \sup f(x) = \max f(x) = \log_2 3$$