Esercizio 1 Compito A
Scriviamo la matrice completa del sistema

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quella incompleta } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango della matrice incompleta:
Il minore

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinate uguale a 3 quindi $\text{rk}(A) \geq 2$. Studiamo gli orlati di M. Il primo orlato è:

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale -6, pertanto si conclude che $\text{rk}(A) = 3$, e necessariamente $\text{rk}(C) = 3$, essendo C una matrice 3×5. Per il Teorema di Rouché Capelli, essendo $\text{rk}(A) = \text{rk}(C) = 3$ il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni e quindi una incognita libera.

Eliminando le righe che non hanno contribuito alla determinazione del rango di A e portando al secondo membro le colonne che non hanno contribuito alla determinazione del rango di A, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 2 - t \\ x + 3y + 2z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Utilizzando la regola di Cramer otteniamo le soluzioni

$$\Big(\frac{2-t}{3}, \frac{t+1}{3}, \frac{2-t}{3}, t\Big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Compito A
Primo metodo: geometrico.

I centri delle due circonferenze si trovano sull'asse del segmento $\overline{OA}$. Quindi troviamo il punto medio di $\overline{OA}$: $M = (2, 1)$ e le componenti del vettore $\mathbf{A} - \mathbf{O} = (4, 2)$.

La retta passante per M ed ortogonale a $\overline{OA}$ ha equazione $r: \ 4(x-2) + 2(y-1) = 0$ cioè $2x + y - 5 = 0$. Un generico punto di r è

$$G_r = (\alpha, -2\alpha + 5)$$

Imponiamo che $\text{d}(G_r, O) = 5$ ottenendo l'equazione

$$5\alpha^2 - 20\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0; \alpha = 4\,.$$

Sostituendo tali valori a G_r otteniamo $C_1 = (0, 5)$ e $C_2 = (4, -3)$ e quindi possiamo scrivere le equazioni delle due circonferenze $\Gamma_1: \ (x-0)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\Gamma_2: \ (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Secondo metodo: algebrico.

Considerata la generica equazione: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Il passaggio per il punto $O = (0, 0)$, $A = (4, 2)$ e la misura del raggio uguale a 5 inducono questo sistema nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c + 20 = 0 \\ a^2/4 + b^2/4 - c = 25 \end{cases}$$

Risolto il sistema, otteniamo i valori di a, b, c che bisogna sostituire alla generica circonferenza, ottenendo quindi Γ_1 e Γ_2.

Esercizio 3 Compito A

Il vettore che caratterizza il piano π ha componenti: $v_\pi = (1, -2, 1)$, quindi le equazioni della retta passante per P_0 e ortogonale al piano π sono:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale di P_0 su π, ottenuta intersecando la retta e il piano π, è $P_\perp = (3/2, 1, 1/2)$. Dalle formule del punto medio di un segmento (osservando che proprio $P_\perp$ è il punto medio del segmento i cui estremi sono P_0 e il simmetrico di P_0 rispetto a π) otteniamo il punto $Q = (2, 0, 1)$.

La simmetria è una trasformazione geometrica che lascia invariate le misure dei lati e gli angoli pertanto il triangolo simmetrico a $O\overset{\triangle}{A}B$ avrà la stessa area di quella di $O\overset{\triangle}{A}B$, quindi basterà calcolare l'area di $O\overset{\triangle}{A}B$. Risulta:
$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{2}$, l'altezza relativa alla base AB ovvero la mediana (visto che il triangolo $O\overset{\triangle}{A}B$ è ISOSCELE in quanto $\mathrm{d}(O, A) = \mathrm{d}(O, B) = 1$), per il Teorema di Pitagora, misura $\sqrt{1^2 - (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{2}/2$. Pertanto l'area misura 1/2.

Esercizio 4 Compito A

Poiché bisogna dare senso al logaritmo, allora il suo argomento deve essere positivo, l'argomento del logaritmo, poi, essendo una frazione, ha senso solo se il denominatore non si annulla, infine, essendo il denominatore una radice quadrata bisogna porre il radicando maggiore o uguale a zero:

$$\text{C.E.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 1}{-\sqrt{x^2 + 2x}} > 0;\ -\sqrt{x^2 + 2x} \neq 0;\ x^2 + 2x \geq 0 \right\}$$

Ovvero bisogna risolvere il seguente sistema:

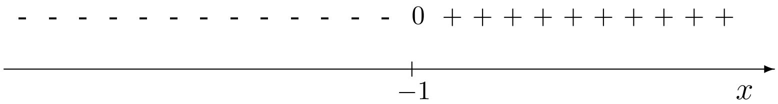
$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x + 1}{-\sqrt{x^2 + 2x}} > 0 \\ -\sqrt{x^2 + 2x} \neq 0 \\ x^2 + 2x \geq 0 \end{cases} \quad \text{che è equivalente al sistema:} \quad \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < 0 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$$

in quanto la funzione a denominatore (all'interno del campo di esistenza della radice) assume valori solo negativi o nulli, quindi perché la frazione risulti positiva occorre che sia negativo anche il numeratore; inoltre perché il denominatore non si annulli occorre che il radicando sia positivo.

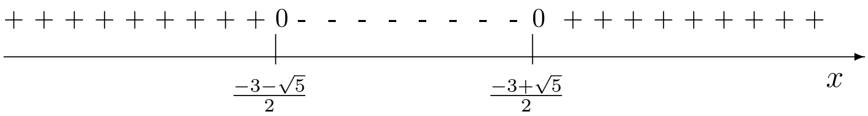
Risolviamo la prima disequazione. Risulta:

$$x^3+4x^2+4x+1 = x^3+1+4x^2+4x = (x+1)(x^2-x+1)+4x(x+1) = (x+1)(x^2+3x+1)$$

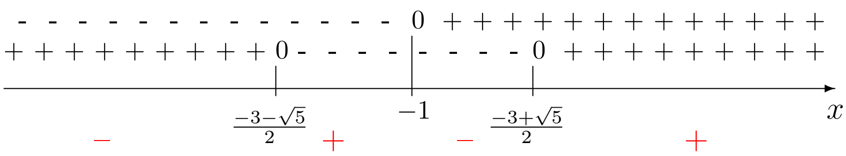
pertanto per risolvere la disequazione occorre studiare il segno dei due fattori.
Per quanto riguarda il primo, l'equazione associata è $x+1=0 \rightarrow x=-1$, il segno del coefficiente di x è positivo, pertanto il grafico di segno è:



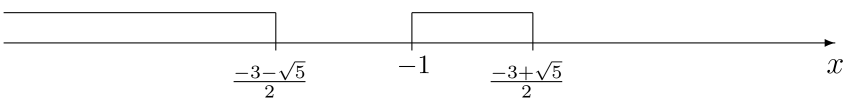
Studiamo adesso il segno del secondo fattore.
Risulta: $\Delta = 5 > 0$ quindi l'equazione associata ammette le due soluzioni: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, il coefficiente di x^2 è positivo, pertanto il segno del polinomio è:



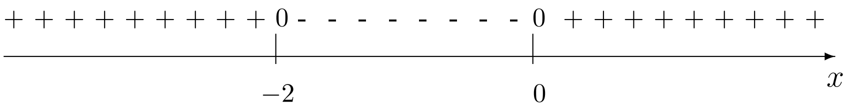
Il segno del denominatore è quindi dato dal prodotto dei segni dei due fattori:



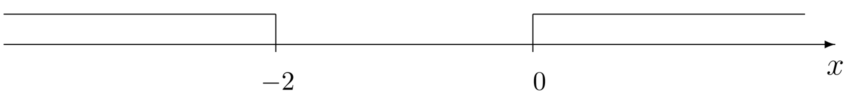
pertanto la soluzione della prima disequazione è:



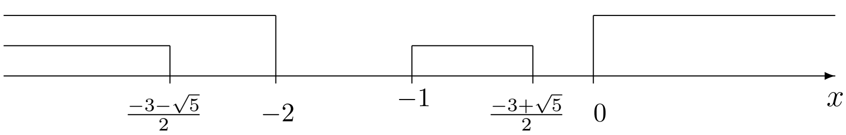
Consideriamo la seconda disequazione. L'equazione associata $x^2+2x = x(x+2) = 0$ ammette le soluzioni $x=0$ e $x=-2$, ed essendo il coefficiente di x^2 positivo il grafico di segno è:



si deduce che la seconda disequazione è soddisfatta per:



Dai grafici di segno delle due disequazioni:



otteniamo che la soluzione comune, e quindi il campo di esistenza, è per $x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 5 Compito A
Il limite si presenta nella forma indeterminata $-\infty \cdot 0$, in quanto:

$$\lim_{x\to-\infty} \log \frac{x+1}{x-2} = \log(1) = 0.$$

Sapendo che:

$$\lim_{x\to c} \frac{\text{sen}(f(x))}{f(x)} = 1 \qquad \text{purché } \lim_{x\to c} f(x) = 0$$

pertanto:

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\text{sen}\left(\log \frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{sen}\left(\log \frac{x+1}{x-2}\right)}{\log \frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{\log \frac{x+1}{x-2}}{\frac{1}{x}}$$

Il primo fattore tende a 1 applicando il limite notevole ricordato sopra. Per quanto riguarda il calcolo del limite del secondo fattore si può fare:

- Applicando la Regola di De L'Hôpital (in quanto tale limite si presenta nella forma indeterminata 0/0)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{-3}{(x-2)^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{(x-2)(x+1)} = 3$$

- oppure utilizzando un altro limite notevole (che ovviamente coinvolge il logaritmo) e cioé:

$$\lim_{x\to c} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1 \qquad \text{purché } \lim_{x\to c} f(x) = 0$$

e quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log \frac{x+1}{x-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(1-1+\frac{x+1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x-2}\right)}{\frac{3}{x-2}} \frac{\frac{3}{x-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x-2}\right)}{\frac{3}{x-2}} \frac{3x}{x-2} = 1 \cdot 3.$$

in definitiva si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\text{sen}\left(\log \frac{x+1}{x-2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Esercizio 6 Compito A
La funzione è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Proviamo che la funzione è continua anche in $x = 1$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 5; \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x} = 5$$

dunque $f(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo adesso la derivata prima di $f(x)$. Per $x < 1$ si ha:

$$\text{D}\Big[2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x}\Big] = 2 \cdot \text{D}\Big[2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x}\Big] = 2 \cdot \frac{\text{D}[\sqrt{30-5x} \cdot (3-x) - \sqrt{30-5x} \cdot \text{D}[3-x]}{(3-x)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{-5}{2\sqrt{30-5x}} \cdot (3-x) - \sqrt{30-5x} \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{-5x+45}{(3-x)^2\sqrt{30-5x}}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ in $x<1$. Poiché il denominatore è positivo per ogni $x<1$ perché prodotto in $x<1$ di un quadrato e di una radice quadrata (che non si annullano per $x<1$), allora il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore: $-5x+45$. L'equazione associata è:

$$-5x+45=0 \rightarrow x=9$$

pertanto il grafico di segno è:

+ + + + + + + + | + + + 0 - - - - - - - - - -

1 9 x

(In rosso la parte che ci interessa), quindi $f(x)$ è crescente in $]-\infty,1[$.

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$ per $x>1$. Risulta:

$$\mathrm{D}\big[x+3+1/x\big]=1+\big(-1/x^2\big)=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ in $x>1$. Poiché il denominatore è positivo per ogni $x>1$ essendo un quadrato non nullo, il segno di $f'(x)$ è determinato da quello del numeratore: x^2-1. Dal fatto che l'equazione $x^2-1=0$ ammette le due soluzioni ± 1, e poiché il coefficiente di x^2 è positivo, otteniamo il seguente grafico di segno:

+ + + + + + + 0 - - - - - - - - - - 0 + + + + + + +

-1 1 x

(In rosso la parte che ci interessa), quindi in $]1,+\infty[$ $f(x)$ è crescente.

Essendo

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-5x+45}{(3-x)^2\sqrt{30-5x}}=2; \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^2}=0$$

concludiamo che NON esiste $f'(1)$.

Vediamo il comportamento agli estremi del C.E. Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x}:$$

- direttamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\sqrt{\frac{30}{-x}+5}}{-x\big(\frac{3}{-x}+1\big)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{-x}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{30}{-x}+5}}{\big(\frac{3}{-x}+1\big)}=0\cdot\sqrt{5}=0$$

  N.B. Osserva che i radicandi delle radici quadrate DEVONO essere sempre quantità NON NEGATIVE pertanto abbiamo messo in evidenza nelle radici $-x$ perché quando $x\rightarrow-\infty$, $-x$ è POSITIVO.

- applicando la Regola di De L'Hôpital (in quanto tale limite si presenta nella forma indetrminata $\frac{\infty}{\infty}$):

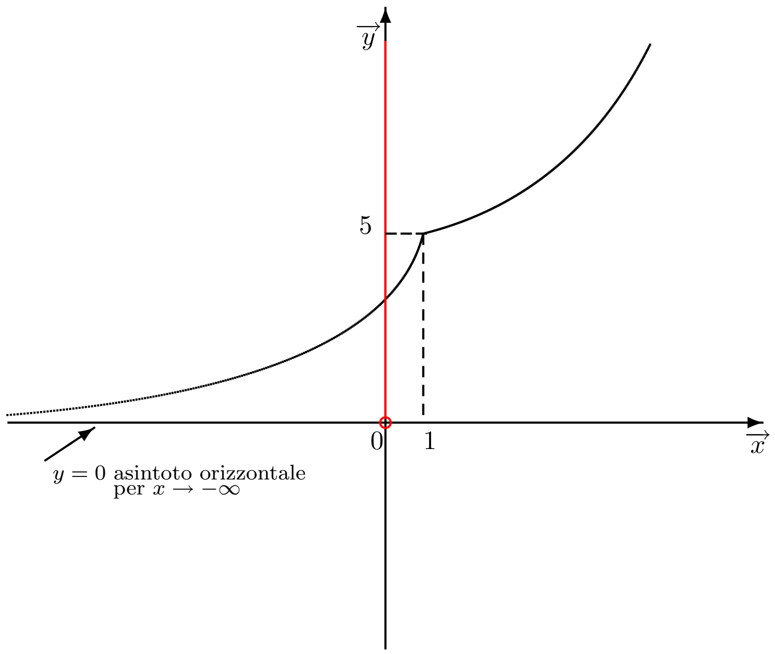
$$\lim_{x\to-\infty} 2\frac{\sqrt{30-5x}}{3-x}=\lim_{x\to-\infty} 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{30-5x}}(-5)}{-1}=0$$

Pertanto la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale.

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} (x + 3 + 1/x) = +\infty$$

Un grafico approssimato della funzione è il seguente:



in rosso abbiamo indicato il codominio (Insieme delle Immagini) della funzione, cioé l'intervallo $]0, +\infty[$, pertanto gli estremi della funzione sono:

$$\inf f(x) = 0; \qquad \text{e} \qquad \sup f(x) = +\infty\,.$$

Esercizio 1 Compito B

Scriviamo la matrice del sistema

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e quella incompleta } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango della matrice incompleta. Il minore

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinate uguale a 6 quindi $\mathrm{rk}(A) \geq 2$. Studiamo gli orlati di M. Il primo orlato è:

$$O_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale 0 (osserva che ci sono due colonne uguali). Il secondo orlato è:

$$O_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale 0, pertanto $\mathrm{rk}(A) = 2$. Calcoliamo adesso il rango di C. Orlando sempre M otteniamo i seguenti orlati: O_1, O_2 che come abbiamo visto hanno determinante

0 e

$$O_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale 0 pertanto anche $\mathrm{rk}(C) = 2$. Per il Teorema di Rouché Capelli, essendo $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(C) = 2$ il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, quindi 2 incognite libere.

Eliminando le righe che non hanno contribuito alla determinazione del rango comune di A e C e portando al secondo membro le colonne che non hanno contribuito alla determinazione del rango di A si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3 - 2z - t \\ 3y = 1 + t \end{cases}$$

Utilizzando la Regola di Cramer generalizzata otteniamo le soluzioni

$$\left(\frac{4 - 2z - 2t}{3}, \frac{t+1}{3}, z, t\right), \qquad z,\ t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 2 Compito A**.

Esercizio 3 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 3 Compito A**.

Esercizio 4 Compito B
Poiché bisogna dare senso al logaritmo, allora il suo argomento deve essere positivo, l'argomento del logaritmo, poi, essendo una frazione, ha senso solo se il denominatore non si annulla, infine, essendo il denominatore una radice quadrata bisogna porre il radicando maggiore o uguale a zero:

$$\text{C.E.} = \left\{x \in \mathbb{R}\ :\ \frac{x^3 + x^2 - x}{-\sqrt{x^2 - 1}} > 0;\ -\sqrt{x^2 - 1} \neq 0;\ x^2 - 1 \geq 0\right\}$$

Ovvero bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - x}{-\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \\ -\sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{che è equivalente al sistema:} \quad \begin{cases} x^3 + x^2 - x < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

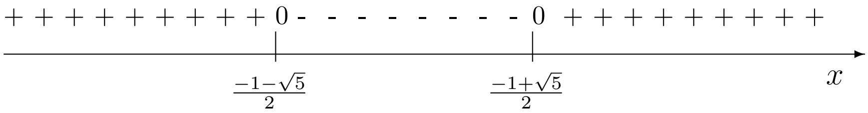
in quanto la funzione a denominatore (all'interno del campo di esistenza della radice) assume valori solo negativi o nulli, quindi perché la frazione risulti positiva occorre che sia negativo anche il numeratore; inoltre perché il denominatore non si annulli occorre che il radicando sia positivo.

Risolviamo la prima disequazione. Risulta: $x^3 + x^2 - x = x(x^2 + x - 1)$ pertanto per risolvere la disequazione occorre studiare il segno dei due fattori.
Per quanto riguarda il primo, l'equazione associata è $x = 0$, il segno del coefficiente di x è positivo, pertanto il segno è:

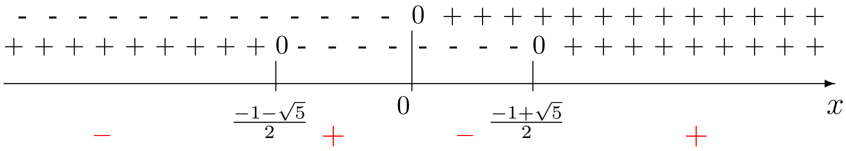
- - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + +

0 $\qquad$ x

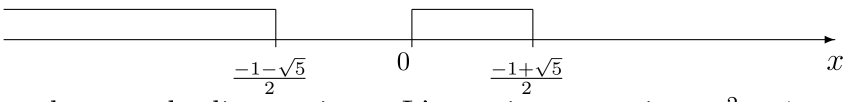
Studiamo adesso il segno del secondo fattore.
Calcoliamo $\Delta = 5 > 0$ quindi l'equazione associata ammette le due soluzioni: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, il coefficiente di x^2 è positivo, pertanto il segno del polinomio è:



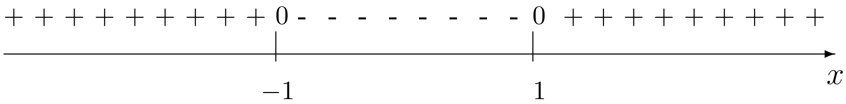
Il numeratore ha, quindi, il segno ottenuto dal prodotto dei segni dei due fattori:



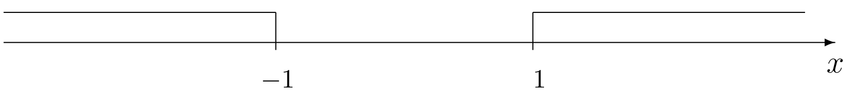
pertanto la soluzione della prima disequazione è:



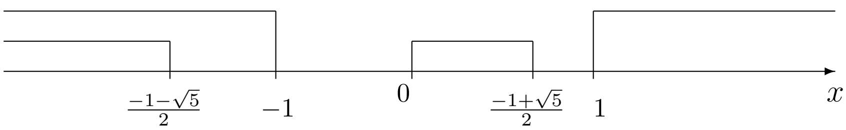
Consideriamo la seconda disequazione. L'equazione associata $x^2 - 1 = 0$ ammette le soluzioni $x = -1$ e $x = 1$, ed essendo il coefficiente di x^2 positivo il grafico di segno è:



si deduce che la seconda disequazione è soddisfatta per:



Dai grafici di segno delle due disequazioni:



otteniamo che la soluzione comune, e quindi il campo di esistenza, è per $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 5 Compito B
Il limite si presenta nella forma indeterminata: $-\infty \cdot 0$ in quanto

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{2x+1} = 0$$

Ricordando il limite notevole:

$$\lim_{x \to c} \frac{\mathrm{e}^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \qquad \text{purché } \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}-1}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}}$$

Il primo fattore tende a 1 applicando il limite notevole ricordato sopra. Per calcolare il limite del secondo fattore, ricordando che:

$$\lim_{x\to c}\frac{\mathrm{sen}(f(x))}{f(x)}=1 \qquad \text{purché } \lim_{x\to c} f(x)=0$$

si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}}\cdot\frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}}=1\cdot 1/2$$

in definitiva si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2x+1}}-1\right)=1\cdot 1\cdot 1/2=1/2.$$

Esercizio 6 Compito B
Svolgimento simile all'**Esercizio 6 Compito A**.