UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2006-2007
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea quadriennale in Matematica)
Terza sessione - I appello - 7 Settembre 2007

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = \log \frac{xy}{x + y} .$$

Determinare
i) l'insieme A di esistenza di f;
ii) gli estremi inferiore e superiore di f in A;
iii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di f in A;
iv) i punti di minimo e di massimo assoluti di f in $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \, , \; 1 \leq y \leq x\}$.

II

Studiare la convergenza puntuale delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{n+1} x^n \; , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^2 + n}{n^2} \; , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n}{n^2} \; .$$

III

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{xy}{x + y} \, dxdy \, ,$$

dove T è il dominio triangolare di vertici $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (0, 1)$, $C \equiv (1, 2)$.

IV

Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni convergente uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione $f(x)$. Esista una costante reale positiva M tale che:

$$|f_n(x)| \leq M \; , \quad \forall \, x \in [a, b] \quad \text{e} \quad \forall \, n \in \mathbb{N} .$$

Mostrare che, se $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ è una funzione uniformemente continua in $[-M, M]$, allora la successione di funzioni $\{g[f_n(x)]\}$ converge uniformemente a $g[f(x)]$ in $[a, b]$.