UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2009-2010
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - I appello - 29 Gennaio 2010

I

Determinare le radici cubiche del numero complesso i e risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^4 - 2iz^3 - iz - 2 = 0\,.$$

II

Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n! - \operatorname{sen} n}$;

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!-1}{(n+1)!} \operatorname{sen} n$;

iii) $\lim_{n\to\infty} (1-\cos \pi n)^{(-1)^n n}$;

iv) $\lim_{n\to\infty} (1-\cos \pi n)^{(-1)^n n} \operatorname{sen} n$.

III

Studiare, per ogni valore dell'intero positivo k, la funzione:

$$f_k(x) = \log \frac{|x|+1}{x^{2k}}$$

e tracciarne il grafico.

IV

Calcolare, per ogni intero positivo k, l'area del trapezoide:

$$T_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \log \frac{|x|+1}{x^{2k}}\right\}$$

e provare che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta: $\operatorname{area} T_k \ge \log 2 - \frac{3}{2}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.

I Candidati il cui programma non prevede lo studio degli integrali, al posto del quesito IV dovranno svolgere il seguente:

IV bis

Sia f una funzione reale di classe C^∞ in $\mathbb{R}$ tale che:

$$f(x) = f(-x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Provare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$f^{(2n-1)}(x) = -f^{(2n-1)}(-x)\,, \quad f^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(-x)\,.$$