

UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2000-2001
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica)
Sessione invernale - II appello - 26 Febbraio 2002

I

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3|2x - 3|}$$

e tracciarne il grafico.

II

Calcolare i seguenti limiti:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \log \frac{1}{n}$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \log \frac{n^4 + 1}{n^5}$;
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \log \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$;
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n^4}} (n^2 x^2 + 1) \log \frac{x+1}{n} dx$.

III

Sia $g(t)$ la funzione definita in $] - \infty, +\infty[$ dalla legge:

$$g(t) = \begin{cases} \log(t+1) & \text{se } t \geq 0 \\ \sin t & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dire quali derivate (prima, seconda, ...) della funzione:

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in] - \infty, +\infty[,$$

esistono per $x = 0$ e calcolarle.

IV

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Provare che:

- j) $(e^b - e^a) \min_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} f(x) e^x dx \leq (e^b - e^a) \max_{[a,b]} f$;
- jj) esiste $\xi \in [a, b]$ tale che: $\int_{[a,b]} f(x) e^x dx = f(\xi)(e^b - e^a)$.