

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2008-2009

Prova scritta di **Analisi Matematica I**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - II appello - 25 Settembre 2009

I

Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi numerici:

$$\left\{ \frac{n^2}{e^{2n}}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ (-1)^n \frac{n^2}{e^{2n}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(e^{\frac{1}{n}} - 1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}.$$

III

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$$

e tracciarne il grafico.

IV

Siano f e g due funzioni reali, derivabili in $[0, 1]$ e tali che: $f(0) \cdot g(0) = 0$, $f(1) \cdot g(1) = 1$. Provare che

$$\int_0^1 \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{1 + [f(x)g(x)]^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^4} dx.$$

I Candidati il cui programma non prevede lo studio delle serie numeriche e degli integrali, al posto dei quesiti II e IV dovranno svolgere i seguenti:

II bis

Calcolare, al variare del parametro reale λ , il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(e^{\frac{\lambda}{x}} - 1)}{1 + \sqrt{x}}.$$

IV bis

Siano f e g due funzioni reali, derivabili in $] -\infty, +\infty[$ e tali che: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
Trovare una funzione reale $F(x)$, derivabile in $] -\infty, +\infty[$ e tale che:

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{1 + [f(x)g(x)]^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare il $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.