

UNIVERSITÀ DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2005-2006  
Prova scritta di **Analisi Matematica III**  
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)  
Prima sessione - II appello - 24 Febbraio 2006

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: due ore.
  - 3) I candidati sono tenuti a svolgere solo tre quesiti.
- 

I

Sia  $f$  la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right).$$

Trovare

- i) l'insieme di esistenza  $X$  di  $f$ ;
- ii) gli estremi inferiore e superiore di  $f$  in  $X$ ;
- iii) i punti di minimo e di massimo assoluti di  $f$  in  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ .

II

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) dx dy,$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\}$ .

III

Provare che la curva piana  $\gamma$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \int_0^t e^{-s^2} ds \end{cases}, \quad t \in [1, 2],$$

è regolare.

Posto  $y_1 = \int_0^1 e^{-s^2} ds$ ,  $y_2 = \int_0^2 e^{-s^2} ds$ ,  $A \equiv (1, y_1)$ ,  $B \equiv (2, y_2)$ , calcolare l'integrale della forma differenziale:

$$e^{-x^2} x dx + x dy$$

lungo  $\gamma$  percorsa nel verso che va da  $A$  a  $B$ .

IV

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x e^{-y^2}}{y} \\ y(1) = -2. \end{cases}$$