UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2003-2004
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))
Prima sessione - II appello - 24 Febbraio 2004

I

Trovare i punti

i) di massimo e di minimo assoluti della restrizione della funzione: $(x^2+y^2-1)(x^2-y^2)$ al cerchio $x^2+y^2 \leq 1$;

ii) di massimo e di minimo relativi della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2-y^2) & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2-y^2 & \text{se } x^2+y^2 > 1\,. \end{cases}$$

II

Studiare le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+2)(n+3)}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^n(x^2+1)}{n!}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{x}{(n+2)(n+3)} + \frac{\log^n(x^2+1)}{n!}\right] dx$$

e, di quelle convergenti, calcolarne le somme.

III

Siano a, b e c tre numeri reali positivi e sia X il dominio di $\mathbb{R}^3$ definito dalle limitazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,.$$

Provare che

$$\frac{1}{a} \iiint_X x\,dxdydz = \frac{1}{b} \iiint_X y\,dxdydz = \frac{1}{c} \iiint_X z\,dxdydz = \frac{\pi}{16}\,abc$$

e determinare il baricentro di X.

IV

Siano r un numero reale positivo e $g(x,y)$ una funzione reale continua nel cerchio chiuso C, con centro nell'origine e raggio r. Provare che se g è tale che $g(y,x) = -g(x,y)$, per ogni $(x,y) \in C$, allora risulta: $\iint_C g(x,y)\,dxdy = 0$.