UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2005-2006
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))
Prima sessione - II appello - 23 Febbraio 2006

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y} + 1\right) .$$

Trovare
i) l'insieme di esistenza X di f;
ii) gli estremi inferiore e superiore di f in X;
iii) i punti di minimo e di massimo assoluti di f in $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2\,,\ 0 \leq x \leq y\}$.

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^3(n+1)} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) .$$

III

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \arctan\left(\frac{x}{y} + 1\right) dxdy \,,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 2y\,,\ 1 \leq y \leq 2\}$.

IV

Nello spazio metrico $(C^0([0, 1]), d)$, con $d(f, g) = \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|\, dx$, $f, g \in C^0([0, 1])$, provare che la successione
i) $\{e^{-\frac{x^2}{n}}\}$ converge alla funzione: $f(x) = 1$, per ogni $x \in [0, 1]$;
ii) $\{e^{nx}\}$ non converge.