

UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2005-2006
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - II appello - 23 Febbraio 2006

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
 - 2) Tempo: tre ore.
 - 3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).
-

I

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx.$$

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^3(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

III

Nello spazio metrico $(C^0([0,1]), d)$, con $d(f, g) = \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)| dx$, $f, g \in C^0([0,1])$, provare che la successione

- i) $\{e^{-\frac{x^2}{n}}\}$ converge alla funzione: $f(x) = 1$, per ogni $x \in [0, 1]$;
- ii) $\{e^{nx}\}$ non converge.

IV

Studiare la funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

e tracciarne il grafico.

V

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y} + 1\right).$$

Trovare

- i) l'insieme di esistenza X di f ;
- ii) gli estremi inferiore e superiore di f in X ;
- iii) i punti di minimo e di massimo assoluti di f in $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y\}$.