UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2007-2008
Prova scritta di **Analisi Matematica III**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - II appello - 22 Febbraio 2008

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: due ore.

I

Siano $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ le funzioni reali definite da:

$$X(x,y) = \frac{\log(y-1)}{2\sqrt{x-1}} + y\,, \quad Y(x,y) = \frac{\sqrt{x-1}}{y-1} + x - 2\,.$$

i) Determinare gli insiemi Ω_1 e Ω_2 di esistenza delle funzioni $X(x,y)$ e $Y(x,y)$, rispettivamente.
ii) Provare che in $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ la forma differenziale: $\omega \equiv X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$ è esatta e trovarne le primitive.
iii) Detta $F(x,y)$ la primitiva in Ω della forma differenziale ω che nel punto $(2,2)$ assume il valore zero, provare, facendo uso del teorema del Dini, che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce in un intorno del punto $x_0 = 2$ una ed una sola funzione implicita $y(x)$, derivabile e tale che: $y(2) = 2$, e che questa funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine:

$$y' = \frac{1-y}{2\sqrt{x-1}}\,\frac{\log(y-1) + 2y\sqrt{x-1}}{(x-2)(y-1) + \sqrt{x-1}}\,.$$

II

Siano λ un numero reale positivo e T'_λ e T''_λ i due domini di $\mathbb{R}^3$ definiti da:

$$T'_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq \lambda^2 z^2\,,\ z \geq 0\}\,,$$
$$T''_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ x^2 + y^2 \geq \lambda^2 z^2\,,\ z \geq 0\}\,.$$

j) Provare che $\mathrm{vol}\,T'_\lambda = \mathrm{vol}\,T''_\lambda$ se e solo se $\mathrm{vol}\,T'_\lambda = \frac{\pi}{3}$.
jj) Determinare in $]0,+\infty[$ il valore di λ per cui valgono le uguaglianze del punto j).

III

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + y'' + y' = (39x - 395)e^{3x} \\ y(0) = -11\,,\ y'(0) = -32\,,\ y''(0) = -93\,. \end{cases}$$