

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2010-2011

Prova scritta di **Analisi Matematica I** e di **Laboratorio di Calcolo**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - II appello - 21 Luglio 2011

I

Siano k un numero reale e A e B_k gli insiemi numerici definiti dalle leggi:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} : a = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad B_k = \left\{ b \in \mathbb{R} : b = (k^2 + 1) \frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare i valori di k per cui gli insiemi A e B_k risultano separati. Per quali valori di k A e B_k sono anche contigui?

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n(n^2 + 1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n+1)}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \frac{1}{n}.$$

III

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

e tracciarne il grafico.

IV

Provare che

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{e^x}{x^2+1} \leq \frac{(e-1)x+1}{x^2+1}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

e che

$$\frac{\pi}{4} + \log \sqrt{2} \leq \int_0^1 \frac{e^x}{x^2+1} dx \leq \frac{\pi}{4} + (e-1) \log \sqrt{2}.$$

I Candidati il cui programma non prevede lo studio delle serie numeriche e degli integrali, al posto dei quesiti II e IV dovranno svolgere i seguenti:

II bis

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n(n^2 + 1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\log(n+1)}{n^3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \frac{1}{n}.$$

IV bis

Provare che la funzione: $\varphi(x) = x|x|$ soddisfa, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la condizione: $\varphi'(x) + \varphi(x) = |x|(2+x)$.