

UNIVERSITÀ DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2004-2005  
Prova scritta di **Analisi Matematica II**  
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))  
Seconda sessione - I appello - 21 Giugno 2005

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: tre ore.
- 

I

Siano  $n$  un intero positivo e  $a$  e  $b$  due numeri reali positivi. Trovare i punti di minimo e di massimo assoluti della restrizione della funzione:

$$f_n(x, y) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n y$$

al rettangolo  $\Delta = [0, \frac{a}{b}] \times [0, 1]$ .

II

Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali positivi. Studiare, nell'intervallo  $[0, \frac{a}{b}]$ , la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$\left\{ \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \right\}.$$

III

Posto, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - e^{-x}$ , sia  $d_f(x, y)$  la funzione definita in  $\mathbb{R}^2$  dalla legge:

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Provare che  $d_f(x, y)$  è una distanza su  $\mathbb{R}$ .  $(\mathbb{R}, d_f)$  è uno spazio metrico completo?

IV

Provare che

$$0 < \iint_T x^2 (\pi - x)^2 y \sin x \, dx dy < \frac{\pi^4}{16},$$

dove  $T = [0, \pi] \times [0, 1]$ .