UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Seconda sessione - I appello - 21 Giugno 2005

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.
3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).

I

Provare che
$$0 < \int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 \operatorname{sen} x \, dx < \frac{\pi^4}{8} .$$

II

Siano a e b due numeri reali positivi. Studiare, nell'intervallo $[0, \frac{a}{b}]$, la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:
$$\left\{ \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \right\} .$$

III

Posto, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - e^{-x}$, sia $d_f(x, y)$ la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ dalla legge:
$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| .$$
Provare che $d_f(x, y)$ è una distanza su $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, d_f)$ è uno spazio metrico completo?

IV

Siano n un intero positivo e a e b due numeri reali positivi. Trovare i punti di minimo e di massimo assoluti della restrizione della funzione:
$$f_n(x, y) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n y$$
al rettangolo $\Delta = [0, \frac{a}{b}] \times [0, 1]$.

V

Siano n un intero positivo e a e b due numeri reali positivi. Studiare, al variare di n, la restrizione della funzione:
$$f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$$
all'intervallo $[0, \frac{a}{b}]$ e tracciarne il grafico.