UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2007-2008
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - II appello - 21 Febbraio 2008

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Calcolare, per ogni valore del parametro reale non negativo λ, l'area del trapezoide, $T(f_\lambda)$, di base $[0,1]$ e relativo alla funzione:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda x + 1}{x^2 + x + 1}\,.$$

Per quale valore di λ, dell'intervallo $[0, +\infty[$, $T(f_\lambda)$ ha area minima?

II

Studiare, in ogni intervallo del semiasse $[0, +\infty[$, la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$\left\{(n^2 + 1 - n)\,\text{sen}\,\frac{x}{n^2}\right\}\,, \quad \left\{(1 - n)\,\text{sen}\,\frac{x}{n^2}\right\}.$$

III

i) Sia (S, d) uno spazio metrico. Provare che se la metrica d verifica, per ogni x, $y \in S$, la condizione: $d(x, y) \le \frac{1}{2}$, allora anche la funzione, di $S \times S$ in $\mathbb{R}$, definita dalla legge:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d^2(x, y)}\,, \quad x\,,\ y \in S\,,$$

è una metrica su S.

ii) Sia $X = \{f \in C^0([0, 1]) : |f(x)| \le \frac{1}{4}\,,\ \forall x \in [0, 1]\}$. Provare che

$$d_X(f, g) = \frac{\max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|}{1 + (\max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|)^2}\,, \quad f, g \in X\,,$$

è una metrica su X.

iii) Detto $I_X(0, \frac{1}{4})$ il cerchio aperto dello spazio metrico (X, d_X) di centro la funzione identicamente nulla in $[0, 1]$ e raggio $\frac{1}{4}$, mostrare che $X = I_X(0, \frac{1}{4})$.

IV

Dopo aver determinato l'insieme A di esistenza della funzione reale:

$$f(x, y) = \cos\frac{x}{y}\,,$$

trovare

j) in A gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi per f;

jj) in A gli eventuali punti di minimo e di massimo assoluti per f;

jjj) il minimo ed il massimo assoluto della restrizione di f a $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2\,,\ \frac{4x}{\pi} \le y \le \frac{6x}{\pi}\}$.