

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Prova scritta di **Analisi Matematica III**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)  
Seconda sessione - I appello - 20 Giugno 2008

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.

2) Tempo: due ore.

---

I

Sia  $T$  una lamina del piano  $O\vec{x}\vec{y}$ , la cui forma è definita dalle limitazioni:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

e con densità superficiale di massa,  $\mu(x, y)$ , proporzionale alla distanza dall'asse delle ascisse:  $\mu(x, y) = k y$ ,  $k > 0$ .

Determinare:

i) la massa totale  $m = \iint_T \mu(x, y) dx dy$  della lamina;

ii) le coordinate

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_T x \mu(x, y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_T y \mu(x, y) dx dy$$

del baricentro;

iii) il momento d'inerzia  $I_O = \iint_T (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy$  rispetto all'origine.

II

Posto  $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = \sin x\}$ ,  $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (\frac{\pi}{2}, 1)$ , calcolare gli integrali curvilinei della forma differenziale:

$$y e^x dx + e^y \sin x dy,$$

lungo le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  percorse nel verso che va da  $A$  a  $B$ .

III

Risolvere, per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y-1}{x-1} \\ y(2) = y_0. \end{cases}$$