UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2008-2009
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica)
Seconda sessione - I appello - 19 Giugno 2009

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Calcolare i seguenti limiti:
i) $\lim_{x\to+\infty}(\log x + \frac{1}{x})$;
ii) $\lim_{x\to 0^+}(\log x + \frac{1}{x})$;
iii) $\lim_{x\to+\infty}(\log x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$;
iv) $\lim_{x\to 0^+}(\log x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$;
v) $\lim_{x\to+\infty} e^x \log x$;
vi) $\lim_{x\to 0^+} e^x \log x$.

II

Studiare le funzioni:

$$f(x) = \log x + \frac{1}{x}\ , \quad g(x) = \log x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

e tracciarne i grafici.

III

Posto, per ogni $x > 0$, $h(x) = e^x \log x$, provare che
j) $h(x)$ è crescente in $]0, +\infty[$;
jj) se ξ denota lo zero in $]0, +\infty[$ della funzione $g(x)$, allora $\xi \in]0, 1[$ e $h(x)$ è convessa in $]\xi, +\infty[$ e concava in $]0, \xi[$.

IV

Provare che in $[1, 2]$ risulta: $0 < f(x) \leq g(x)$ e calcolare le aree dei seguenti insiemi piani:
$T(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$,
$T(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$,
$T(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\ ,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.