UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2008-2009
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Seconda sessione - II appello - 17 Luglio 2009

I

Sia $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) un arbitrario numero complesso. Dopo aver provato che: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione: $z^3 = |z|^2$.

II

Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\arctan \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2} \right) , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^2 n} , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\cos x|^{n-1} \ (x \in \mathbb{R}) ,$$

ed in caso di convergenza calcolarne la somma.

III

Sia $f(x) = \frac{1}{1-|\cos x|}$.

i) Determinare l'insieme I di esistenza di $f(x)$.
ii) Provare che $f(x)$ è in I periodica di periodo π, cioè che: $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall\, x \in I$ e $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
iii) Studiare la restrizione di $f(x)$ all'intervallo $]0, \pi[$ e tracciarne il grafico.
iv) Provare che il grafico della restrizione di $f(x)$ all'intervallo $]0, \pi[$ è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$, cioè che: $f(x) = f(\pi - x)$, $\forall\, x \in]0, \pi[$.

IV

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1 - |\cos x|} \, dx .$$

I Candidati il cui programma non prevede lo studio delle serie numeriche e degli integrali, al posto dei quesiti II e IV dovranno svolgere i seguenti:

II bis

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{n} , \quad \lim_{n\to\infty} (2^n - 3^n) \log n^{\frac{1}{n}} , \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n! + 1}{n!} \right)^n .$$

IV bis

Sia, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Posto $a = \frac{3}{2}$ e $b = 3$, determinare i punti x di $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tali che: $g'(x)(b - a) = g(b) - g(a)$ e scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di $g(x)$ parallele alla retta congiungente $A \equiv (a, g(a))$ e $B \equiv (b, g(b))$.