UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2005-2006
Prova scritta di **Analisi Matematica III**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - Appello straordinario - 15 Dicembre 2006

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: due ore.
3) I candidati sono tenuti a svolgere almeno tre quesiti.

I

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right).$$

Trovare
i) gli estremi inferiore e superiore di f nel suo insieme di esistenza;
ii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di f nel suo insieme di esistenza;
iii) i punti di minimo e di massimo assoluti della restrizione di f a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \geq y\}$.

II

Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_T \left[e^{x^2+y^2} + \frac{\log(\sqrt{z}+1)}{z\sqrt{z}}\right] dxdydz\,,$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq z \leq 1\,,\ x^2+y^2 \leq z \leq 4(x^2+y^2)\}$.

III

Per ogni $\delta \in]0,1[$, si denoti con T_δ l'insieme di $\mathbb{R}^3$ definito dalla legge:

$$T_\delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (1-\delta)^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq (1+\delta)^2\,,\ x^2+y^2 \leq z^2\,,\ z > 0\}$$

e con $\operatorname{vol} T_\delta$ il suo volume. Provare che
j) $\operatorname{vol} T_\delta = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(\sqrt{2}-1)\,\delta\,(\delta^2+3)$;
jj) l'area della superficie S di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = \sqrt{1-\varrho^2} \end{cases} \quad , \quad (\vartheta,\varrho) \in [0,2\pi]\times[0,\tfrac{\sqrt{2}}{2}]\,,$$

è il $\lim_{\delta\to 0^+} \frac{\operatorname{vol} T_\delta}{2\delta}$.

IV

Determinare una soluzione in $]-\infty,+\infty[$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1+x^2}\,y + e^{-x}y^3 \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,. \end{cases}$$