UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2006-2007
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - Appello straordinario - 14 Dicembre 2007

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Provare che l'insieme piano:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le (\cosh 1 - \cosh x)^2 \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 x}\right\}$$

è quadrabile e che la sua area è $2(\operatorname{senh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{senh}^3 1 - \cosh 1)$.

II

Studiare, in ogni intervallo dell'asse reale, la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$\left\{(x^2-1)\frac{1}{n}\right\}\,, \quad \left\{(x^2-1)^n\right\}\,, \quad \left\{(x^2-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}.$$

III

Sia f una funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Provare che se f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ e se esistono due costanti positive h e k tali che:

$$f_x(x,y) \ge h\,, \quad f_y(x,y) \ge k\,, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

allora

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f_0(x,y) = +\infty\,, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} f_1(x,y) = -\infty\,,$$

dove f_i, $i = 0,1$, è la restrizione di f all'aperto $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-1)^i x > 0\,,\ (-1)^i y > 0\}$.

IV

Sia F la funzione reale definita dalla legge:

$$F(x,y) = \log(x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1)\,.$$

Trovare
i) l'insieme di esistenza X di F;
ii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di F in X;
iii) gli eventuali punti di minimo e di massimo assoluti di F in X;
iv) gli estremi inferiore e superiore di F in X.