UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))
Seconda sessione - II appello - 14 Luglio 2005

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.

I

Siano $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x + y^2 \le 0\}$ ed f la funzione reale definita in $\mathbb{R}^2$ dalla legge:

$$f(x, y) = \log \frac{x^2 + y^2 + 1}{3} \, .$$

Trovare
i) gli eventuali punti di minimo o di massimo relativi di f in $\mathbb{R}^2$;
ii) i punti di minimo e di massimo assoluti della restrizione di f a C;
iii) gli estremi inferiore e superiore di f in $\mathbb{R}^2$.

II

Studiare la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \, .$$

III

Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' + y' = \operatorname{sen} 2x$$

che verifica le condizioni iniziali: $y(\pi) = \frac{1}{6}$, $y'(\pi) = y''(\pi) = 0$.

IV

Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ tre successioni di funzioni reali definite nell'intervallo (a, b) e tali che

$$f_n(x) \le g_n(x) \le h_n(x) \, , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in (a, b) \, .$$

Provare che
i) se $\{f_n\}$ e $\{h_n\}$ convergono puntualmente (uniformemente) in (a, b) alla stessa funzione f, allora anche $\{g_n\}$ converge puntualmente (uniformemente) in (a, b) a f;
ii) se $\{f_n\}$ converge puntualmente in (a, b) alla funzione f, se $\{h_n\}$ converge uniformemente in (a, b) a f e se, per ogni $x \in (a, b)$, la successione numerica $\{g_n(x)\}$ è monotona non crescente, allora $\{g_n\}$ converge uniformemente in (a, b) a f.