UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Seconda sessione - II appello - 14 Luglio 2005

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.
3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).

I

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^2 \arctan \sqrt{1+2|x-1|}\, dx\,.$$

II

Studiare la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n\,.$$

III

Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ tre successioni di funzioni reali definite nell'intervallo (a,b) e tali che

$$f_n(x) \le g_n(x) \le h_n(x)\;, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in (a,b)\,.$$

Provare che

i) se $\{f_n\}$ e $\{h_n\}$ convergono puntualmente (uniformemente) in (a,b) alla stessa funzione f, allora anche $\{g_n\}$ converge puntualmente (uniformemente) in (a,b) a f;

ii) se $\{f_n\}$ converge puntualmente in (a,b) alla funzione f, se $\{h_n\}$ converge uniformemente in (a,b) a f e se, per ogni $x \in (a,b)$, la successione numerica $\{g_n(x)\}$ è monotona non crescente, allora $\{g_n\}$ converge uniformemente in (a,b) a f.

IV

Siano $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x + y^2 \le 0\}$ ed f la funzione reale definita in $\mathbb{R}^2$ dalla legge:

$$f(x,y) = \log \frac{x^2+y^2+1}{3}\,.$$

Trovare

i) gli eventuali punti di minimo o di massimo relativi di f in $\mathbb{R}^2$;

ii) i punti di minimo e di massimo assoluti della restrizione di f a C;

iii) gli estremi inferiore e superiore di f in $\mathbb{R}^2$.

V

Studiare la funzione:

$$\arctan \sqrt{1+2|x-1|}$$

e tracciarne il grafico.