

UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))
Sessione straordinaria - 13 Dicembre 2005

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
 - 2) Tempo: tre ore.
-

I

Sia f la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x-y-1}} [(x-y)^2 - 7x + 7y + 6].$$

Trovare

- i) l'insieme di esistenza X di f ;
- ii) gli estremi inferiore e superiore di f in X ;
- iii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di f in X ;
- iv) gli eventuali punti di minimo e di massimo assoluti di f in X .

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}$;
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n})$;
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\log n)}$;
- iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\operatorname{sen} x)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

III

Risolvere, al variare del parametro reale k , la seguente equazione differenziale:

$$y'' + ky' + y = xe^x.$$

IV

Siano n un intero positivo ed f una funzione reale definita in \mathbb{R}^n . Provare che esistono due funzioni φ e ψ di \mathbb{R}^n in \mathbb{R} soddisfacenti, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, le seguenti condizioni:

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x), \quad \varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

dove, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.