

UNIVERSITÀ DI CATANIA  
ANNO ACCADEMICO 2004-2005  
Prova scritta di **Analisi Matematica II**  
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)  
Sessione straordinaria - 13 Dicembre 2005

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: tre ore.
  - 3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).
- 

I

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx .$$

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

- i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}$ ;
- ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n})$ ;
- iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\log n)}$ ;
- iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(\operatorname{sen} x)^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

III

Posto

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C^0([0, 1]), \quad f_n(x) = \frac{x^2}{n} + x + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1],$$

calcolare il diametro del sottoinsieme  $X = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$  dello spazio metrico  $(C^0([0, 1]), d)$ .

IV

Studiare la funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-1}} (x^2 - 7x + 6)$$

e tracciarne il grafico.

V

Sia  $f$  la funzione reale definita dalla legge:

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x-y-1}} [(x-y)^2 - 7x + 7y + 6] .$$

Trovare

- i) l'insieme di esistenza  $X$  di  $f$ ;
- ii) gli estremi inferiore e superiore di  $f$  in  $X$ ;
- iii) gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi di  $f$  in  $X$ ;
- iv) gli eventuali punti di minimo e di massimo assoluti di  $f$  in  $X$ .