

UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - I appello - 13 Settembre 2005

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
 - 2) Tempo: tre ore.
 - 3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).
-

I

Risolvere l'equazione:

$$\int_0^{\sqrt{\lambda^2+1}} \log(t^2 + \lambda^2 + 1) dt = \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

nell'incognita reale λ .

II

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$;
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$;
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} 2^n$;
- iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi)$.

III

Siano $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$ ed $f(x, y)$ la funzione definita in \mathbb{R}^2 dalla legge:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}(xy), 1 \right) & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (0, 1) & \text{se } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

Provare che l'insieme $f(T)$ è un compatto di \mathbb{R}^2 .

IV

Determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi della funzione:

$$f(x, y) = \int_0^x \log(t^2 + y^2 + 1) dt .$$

V

Sia λ un numero reale. Studiare, per ogni valore del parametro λ , la seguente funzione reale della variabile reale x :

$$F_\lambda(x) = \int_0^x \log(t^2 + \lambda^2 + 1) dt$$

e tracciarne il grafico.