

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Prova scritta di **Analisi Matematica III**

(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)

Terza sessione - appello straordinario - 12 Dicembre 2008

---

- 1) Non si possono consultare libri o appunti.
  - 2) Tempo: due ore.
- 

I

Siano  $\alpha$  un numero reale dell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  e  $T_\alpha$  il dominio piano definito da

$$T_\alpha = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq mx, y \geq -\frac{1}{m}x\}, & \text{se } \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, & \text{se } \alpha = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}, & \text{se } \alpha = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

dove, se  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $m = \tan \alpha$ .

- i) Determinare le coordinate,  $(x_\alpha, y_\alpha)$ , del baricentro,  $P_\alpha$ , di  $T_\alpha$ .
- ii) Dire per quale valore di  $\alpha$  risulta  $x_\alpha = 0$ .
- iii) Provare che la curva piana  $\gamma$  descritta dal baricentro  $P_\alpha$  di  $T_\alpha$ , al variare di  $\alpha$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , è regolare e calcolarne la lunghezza.

II

Calcolare l'integrale:

$$(\gamma) \int_A^B \frac{-1}{\sqrt{3}y-x} dx + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}y-x} dy,$$

dove  $A \equiv (\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$ ,  $B \equiv (-\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$  e  $\gamma$  è la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3\pi}(\cos t - \sin t) \\ y = \frac{4}{3\pi}(\cos t + \sin t) \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

III

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1-y^2}{x}.$$