UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2000-2001
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica)
Sessione autunnale - I appello - 12 Settembre 2001

I

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x-1|}$$

e tracciarne il grafico.

II

Calcolare i seguenti limiti:
a) $\lim_{n\to\infty} n^3[\log(n^2+2n) - \log n^2] \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n+1}$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \log(1+e^n)$;
c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
d) $\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{1-\cos 2x}} \left(\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos 2x}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$.

III

Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dire quali derivate (prima, seconda, $\ldots$) esistono per $x = 0$ e calcolarle.

IV

Sia $\{y_n\}$ una successione di numeri reali non nulli per cui esiste il $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{2n-1}}{y_{2n}} = l$. Provare che
i) se $\{y_{2n}\}$ diverge positivamente (negativamente) e se $l > 0$, allora anche $\{y_n\}$ diverge positivamente (negativamente);
ii) se $\{y_{2n}\}$ diverge e se $l < 0$, allora $\{y_n\}$ è oscillante.