UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2008-2009
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - Appello straordinario - 11 Dicembre 2009

I

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

e tracciarne il grafico.

II

Provare che i due insiemi numerici:

$$X = \left\{ \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} \, , \, t < -1 \right\} \, , \quad Y = \left\{ \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} \, , \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

sono separati e contigui.

III

Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} \, , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} \, , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\arctan x|^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}) \, .$$

IV

Sia $g(x)$ la funzione reale definita in $\mathbb{R}$ dalla legge:

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x+1}{e^{2x}+1} - \frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} - \arctan e^x + \log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) .$$

Provare che la funzione: $y(x) = \frac{1}{(e^x+1)(e^{2x}+1)}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, soddisfa la condizione: $\int_0^x y'(t) e^t \, dt = g(x)$.

I Candidati il cui programma non prevede lo studio delle serie numeriche e degli integrali, al posto dei quesiti III e IV dovranno svolgere i seguenti:

III bis

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\cos^2 \frac{1}{n} - 1 \right) \, , \quad \lim_{n \to \infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \, , \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\arctan x}{\pi} \right)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \, .$$

IV bis

Posto, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\varphi(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$, calcolare i limiti della funzione: $\varphi(x) - \arctan x$, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, e, facendo uso di uno dei corollari del teorema di Lagrange, provare che esistono due costanti reali c_1 e c_2 tali che:

$$\varphi(x) - \arctan x = \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in]1, +\infty[\\ c_2 & \text{se } x \in]-\infty, 1[\,. \end{cases}$$

Determinare i valori di c_1 e c_2.