UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2000-2001
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica)
Sessione autunnale - III appello - 11 Dicembre 2001

I

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - |\log x|}$$

e tracciarne il grafico.

II

Calcolare i seguenti limiti:
i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{3^x - 4^x}$;
ii) $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x)$;
iii) $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos\frac{1}{n}) \operatorname{sen} n$.

III

Detto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, r_n il resto della divisione di n per 2, determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi di numeri reali:

$$\left\{\frac{n}{n+1}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n+1} r_n\,,\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$\left[\frac{1}{2},1\right] \cup \left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}, \quad \left[\frac{1}{2},1\right] \cap \left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\,,\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Giustificare i risultati e precisare se l'estremo inferiore è minimo e se l'estremo superiore è massimo.

IV

Sia g una funzione reale derivabile in $]-\infty,+\infty[$. Provare che
j) se esistono due numeri reali a e b con $a < b$ tali che

$$g'(a) > 0\ (<0)\,, \quad g'(b) < 0\ (>0)\,,$$

allora i punti di massimo (minimo) per $g|_{[a,b]}$ sono interni all'intervallo $[a,b]$;
jj) se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]-\infty,+\infty[$, allora risulta: $g'(x) > 0$ oppure $g'(x) < 0$ in tutto l'intervallo $]-\infty,+\infty[$.