UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2008-2009
Prova scritta di **Analisi Matematica I**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Terza sessione - I appello - 11 Settembre 2009

I

Detto φ un numero reale, calcolare la potenza:

$$(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^3\,,$$

facendo uso sia della formula di De Moivre che di quella del binomio di Newton, e dedurre le seguenti formule di triplicazione per gli archi:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\,, \quad \mathrm{sen}\,3\varphi = 3\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}^3\varphi\,.$$

II

Calcolare i seguenti limiti:
i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x}{\mathrm{sen}\,x - x}$;
ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{x^2}$;
iii) $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\mathrm{sen}\,x}$.

III

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

e tracciarne il grafico.

IV

Calcolare, per ogni valore del parametro reale λ, il seguente integrale definito: $\int_{-1}^{1} \frac{x+\lambda}{x^2+2x+3}\,dx$.
Determinare il valore di λ per cui risulta: $\int_{-1}^{1} \frac{x+\lambda}{x^2+2x+3}\,dx = \log\sqrt{3}$.

I Candidati il cui programma non prevede lo studio degli integrali, al posto del quesito IV dovranno svolgere il seguente:

IV bis

Provare che la funzione: $(x,y)\mapsto f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ è armonica in $\mathbb{R}^2$, cioé che la funzione: $x\mapsto x^3-3xy^2$ della variabile x, con y fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$, ha derivata seconda opposta della derivata seconda della funzione: $y\mapsto x^3-3xy^2$ della variabile y, con x fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$.
Dette $f_x(x,y)$ la derivata della funzione: $x\mapsto x^3-3xy^2$ della variabile x, con y fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$, ed $f_y(x,y)$ la derivata della funzione: $y\mapsto x^3-3xy^2$ della variabile y, con x fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$, provare che la derivata della funzione: $y\mapsto f_x(x,y)$ della variabile y, con x fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$, è uguale alla derivata della funzione: $x\mapsto f_y(x,y)$ della variabile x, con y fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}$.