UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2005-2006
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - I appello - 9 Febbraio 2006

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: tre ore.
3) I candidati dovranno svolgere i quesiti I, II, III ed uno dei due ultimi (IV o V).

I

Posto $2!! = 2$ e, se h è un intero maggiore di 1, $(2h)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2h)$, $(2h-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2h-1)$, provare che, per ogni intero positivo n, risulta:

i) $\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$;

ii) $\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

II

Studiare in $]-\infty, +\infty[$ la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$\left\{ \frac{(\arctan x)^n}{n!} \right\}, \quad \left\{ \frac{x^2 n^2 + xn + 1}{n^2 + 1} \right\}, \quad \left\{ \frac{\operatorname{sen}(nx) + \log e^{nx}}{n} \right\}.$$

III

Siano $S = C^0([0,1])$, $d_S(f,g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$ $(f, g \in S)$ e $T(f)$ la funzione reale definita in S dalla legge:

$$T(f) = \int_0^1 f(t) \, dt \,, \quad f \in S \,.$$

Provare che $T(f)$ è uniformemente continua in (S, d_S).

IV

Studiare, al variare del parametro reale λ, la funzione:

$$f_\lambda(x) = (x - \lambda)^2 (x + \lambda + 1)$$

e tracciarne il grafico.

V

Determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativi della funzione:

$$f(x, y) = (x - y)^2 (x + y + 1) \,.$$