UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2007-2008
Prova scritta di **Analisi Matematica III**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - I appello - 8 Febbraio 2008

---

1) Non si possono consultare libri o appunti.
2) Tempo: due ore.

I

Siano a e b due numeri reali positivi, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > a\,,\ y > b\}$ e $f(x,y)$ e $\varphi(x,y)$ le restrizioni a X delle funzioni $x^2 + y^2$ e $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1$, rispettivamente.
Provare che l'insieme dei punti di massimo e di minimo relativi per f sotto la condizione $\varphi(x,y) = 0$ è costituito da un solo elemento e che questo punto è di minimo assoluto per f sotto la condizione $\varphi(x,y) = 0$.

II

Siano T_1, T_2 e T_3 tre domini di $\mathbb{R}^3$ limitati e misurabili, con $\mathring{T}_1 \cap \mathring{T}_2 = \emptyset$ e $T_3 = T_1 \cup T_2$, e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ i rispettivi baricentri.

i) Provare, facendo uso della proprietà di additività degli integrali tripli, che

$$x_3 = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i \operatorname{vol} T_i}{\operatorname{vol} T_3}\ , \quad y_3 = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i \operatorname{vol} T_i}{\operatorname{vol} T_3}\ , \quad z_3 = \frac{\sum_{i=1}^2 z_i \operatorname{vol} T_i}{\operatorname{vol} T_3}\ .$$

ii) Calcolare le coordinate dei punti P_1, P_2 e P_3 nel seguente caso:

$$T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2\,, 0 \le z \le 1\}\,,$$
$$T_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ 1 \le z \le 2\} \quad \text{e} \quad T_3 = T_1 \cup T_2\,.$$

III

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y'' - y = 0$$

che soddisfano le condizioni: $y(0) = y(1) = 1$.