UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2003-2004
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti del corso di laurea in Matematica (vecchio ordinamento))
Prima sessione - I appello - 3 Febbraio 2004

I

Provare che la funzione:

$$f(x,y) = \frac{2\,\mathrm{sen}(x+y)}{1+\mathrm{sen}^2(x+y)}$$

è dotata in $\mathbb{R}^2$ di minimo e di massimo assoluto.
Trovare i punti di minimo e di massimo assoluto di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ e in $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq y \leq -x + \frac{\pi}{2}\}$.

II

Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 4x - 4nx^2 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

studiare le seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) - f_{n+1}(x)\big)\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\,,$$

e negli intervalli di convergenza calcolarne le somme.

III

Risolvere, al variare del parametro reale α, la seguente equazione differenziale:

$$y'' + (\alpha - 1)y = e^{\sqrt{|\alpha-1|}\,x}\,x^2\,.$$

IV

Siano r un numero reale positivo e $g(x,y)$ una funzione reale continua nel cerchio chiuso C, con centro nell'origine e raggio r, ivi non negativa. Provare che se $g(0,0) > 0$, allora risulta: $\iint_C g(x,y)\,dxdy > 0$.