UNIVERSITÀ DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2003-2004
Prova scritta di **Analisi Matematica II**
(per gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Matematica per le Applicazioni)
Prima sessione - I appello - 3 Febbraio 2004

I

Determinare la funzione reale $F(x)$ definita in $]-\infty,+\infty[\setminus\{1\}$, ivi derivabile, e soddisfacente le condizioni:
i) $F'(x)=\frac{x^2-x+8}{x^3+x^2+3x-5}$, $\forall x \in]-\infty,+\infty[\setminus\{1\}$;
ii) $F(0)=-\frac{3}{2}\arctan\frac{1}{2}$, $\quad F(2\sqrt{3}-1)=\log(2\sqrt{3}-2)$.

II

Posto, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)=\begin{cases} 4x-4nx^2 & \text{se } 0\le x<\frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n}\le x\le 1\,, \end{cases}$$

studiare le seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(f_n(x)-f_{n+1}(x)\big)\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\,,$$

e negli intervalli di convergenza calcolarne le somme.

III

Scrivere la formula di Taylor, arrestata alle derivate terze, per la seguente funzione:

$$f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}\,,$$

con il punto iniziale $(1,1)$.
Precisare per quali punti (x,y) del piano essa è valida.

IV

Provare che la funzione:

$$g(x,y)=\frac{2\,\mathrm{sen}(x+y)}{1+\mathrm{sen}^2(x+y)}$$

è dotata in $\mathbb{R}^2$ di minimo e di massimo assoluto.
Trovare i punti di minimo e di massimo assoluto di $g(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ e in $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :$ $0\le x\le\frac{\pi}{2}\,,\ 0\le y\le -x+\frac{\pi}{2}\}$.