CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I
Anno Accademico 1999-2000
(Prof. G. Emmanuele)

Argomenti di base. Numeri naturali ed assiomi di Peano. Il Principio di Induzione (con applicazione a: Binomio di Newton, progressioni geometriche, disuguaglianza di Bernoulli, scomposizione di $x^n - y^n$). Interi relativi. Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.
I numeri reali-I. Definizione di numero reale come allineamento decimale. Ordinamento. Valore assoluto. Struttura algebrica: successioni stabilizzate; somma e prodotto di due numeri reali positivi; somma e prodotto di due numeri reali arbitrari; altre operazioni. Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Proprietà di completezza (secondo Dedekind). Esistenza ed unicità della radice n-esima aritmetica. L'equazione $x^n = y$. Potenze di base reale con esponente reale. Logaritmi.
I numeri reali-II. Partizioni di $\mathbb{Q}$ e sezioni di $\mathbb{Q}$. Definizione di numero reale come sezione di $\mathbb{Q}$. Ordinamento. Valore assoluto. Struttura algebrica: somma di due numeri reali; prodotto di due numeri reali positivi; altre operazioni. Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Proprietà di completezza (secondo Dedekind). Esistenza ed unicità della radice n-esima aritmetica. Potenze di base reale con esponente reale. Logaritmi.
Osservazioni sulla definizione di numero reale. Dimostrazione dell'equivalenza delle due definizioni di numero reale. Esistenza di un unico campo totalmente ordinato.
I numeri complessi. Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo. $\mathbb{C}$ non è campo totalmente ordinato. Forma algebrica. Coniugato, modulo ed argomento. Forma trigonometrica. Potenze dei numeri complessi. Radici n-esime. Radici primitive dell'unità. Metodi risolutivi delle equazioni algebriche di secondo, terzo e quarto grado.
Elementi di calcolo combinatorio. Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Il Binomio di Newton (nuova dimostrazione).
Insiemi numerici. Insiemi numerici limitati e non limitati. Maggioranti e minoranti. Massimo e minimo. Estremo superiore ed inferiore. Insiemi numerici separati e contigui.
Distanza in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$. Definizione di distanza in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$. Proprietà. Intorni sferici e loro proprietà. Punto interno, esterno, di accumulazione, di frontiera, isolato. Insiemi aperti, insiemi chiusi e loro proprietà. Interno, derivato, frontiera, chiusura di un insieme e proprietà. Ogni aperto in $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti. Teorema di Heine-Borel in $\mathbb{R}$ (prima dimostrazione). Insiemi limitati e diametro. Distanza di due insiemi.
Successioni. Limiti di una successione. Teorema di unicità del limite. Teorema della permanenza del segno. Teorema di confronto. Teorema di limitatezza delle successioni convergenti. Successioni monotòne e loro limiti. La successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$. Successioni estratte. Operazioni sui limiti di successioni. Forme indeterminate. Teorema di Bolzano-Weierstrass ed altre dimostrazione del eorema di Heine-Borel. Ogni successione limitata ammette estratte monotòne convergenti. Insiemi con distanza nulla. Teorema di Cantor sulle successioni decrescenti di insiemi chiusi e limitati. Criterio di convergenza di Cauchy e completezza secondo Cauchy di $\mathbb{R}$. Infinitesimi ed infiniti (definizioni, confronto, Principio di sostituzione). Alcuni limiti notevoli (limite del rapporto di due polinomi; limite

della successione geometrica; $\lim_n \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} = e; \lim_n \frac{{p_n}^b}{A^{p_n}}$ con $b > 0, A > 1, p_n \to +\infty$; $\lim_n \sqrt[n]{n}$). Massimo e minimo limite (classe limite, definizione, caratterizzazione in termini di ϵ e ν, caratterizzazione in termini di maggioranti e minoranti definitivi, proprietà, studio di $\lim_n (1 + \frac{1}{p_n})^{p_n}$ con $p_n \to \infty$). I Teoremi di Cesaro (teoremi tipo De L'Hopital, successione delle medie aritmetiche, successione delle medie geometriche e conseguenze). Cenni sulle successioni in $\mathbb{C}$ (con applicazione allo studio di $\{\sin n\theta\}, \{\cos n\theta\}$). Equivalenza della completezza secondo Dedekind, della completezza secondo Cauchy e di altre proprietà in campi totalmente ordinati.

I numeri reali-III. I numeri reali come classi di equivalenza dell'insieme delle successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$. Ordinamento. Valore assoluto. Struttura algebrica: successioni stabilizzate; somma e prodotto di due numeri reali positivi; somma e prodotto di due numeri reali arbitrari; altre operazioni. Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Proprietà di completezza (secondo Dedekind). Esistenza ed unicità della radice n-esima aritmetica. L'equazione $x^n = y$. Potenze di base reale con esponente reale. Logaritmi.

Serie numeriche. Definizione di serie. Carattere di una serie e prime proprietà (Criterio di Cauchy, condizione necessaria di convergenza, somma di due serie, prodotto di una serie per una costante). Serie geometrica (con applicazione al calcolo delle frazioni generatrici). Serie telescopiche. Serie armonica. Serie a termini non negativi. Criteri del confronto, della radice, del rapporto, di Kummer, di Raabe, di condensazione di Cauchy. Maggiorazione dell'errore. Criteri di Abel e di Dirichlet, di Leibnitz (ancora con maggiorazione dell'errore). Irrazionalità del numero di Nepero. Convergenza e convergenza assoluta. Proprietà associativa e commutativa (con teorema di Riemann-Dini). Prodotto secondo Cauchy (esempio di serie convergenti il cui prodotto non converge, Teoremi di Abel, Cauchy, Mertens). Cenni sulle serie in $\mathbb{C}$ (con studio della serie geometrica).

Funzioni reali di variabile reale. Positività e simmetrie. Funzioni limitate (con definizione di estremo inferiore, superiore e di minimo e massimo assoluti). Funzioni monotòne in un punto e funzioni monotòne in un intervallo (con confronto delle due definizioni). Definizione di limite. Limiti di restrizioni, limiti destro e sinistro. Relazione fra limiti di successioni e limiti di funzioni. Teoremi sui limiti (fra cui il Teorema sul limite di una Funzione Composta). Forme indeterminate. Asintoti. Limiti notevoli ($\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$; limiti dedotti dal numero di Nepero). Esistenza del limite per funzioni monotòne. Criterio di Cauchy. Massimo e minimo limite. Infinitesimi ed infiniti.

Funzioni continue. Definizione di continuità. Punti di discontinuità. Proprietà fondamentali delle funzioni continue su un intervallo: Teorema di Esistenza degli Zeri (due dimostrazioni), Teorema di Weierstrass (due dimostrazioni), Teorema dei valori intermedi. Continuità, monotonìa ed invertibilità. Successioni definite per ricorrenza e loro studio; algoritmo di Erone. Funzioni razionali intere e loro limiti. Funzioni razionali fratte e loro limiti. Decomposizione di funzioni razionali fratte in somma di fratti semplici. Esponenziali e logaritmi. Funzioni iperboliche e loro inverse. Funzioni trigonometriche e loro inverse. Esponenziale complesso. Logaritmo complesso. Operazione di elevamento a potenza nel campo complesso.

Uniforme continuità. Esempi. Definizione di uniforme continuità. Teorema di Cantor-Heine (due dimostrazioni). Asintoti ed uniforme continuità. Condizione nencessaria per la continuità uniforme. Funzioni lipschitziane, hölderiane ed uniformemente continue (con esempi). Prolungabilità di funzioni uniformemente continue.

Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale. Definizione di derivata. Derivata destra e derivata sinistra. Significato geometrico di f' (retta tangente, punti angolosi, cuspidali, di flesso a tangente verticale). Funzione derivata. Calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Derivate successive. Algebra delle derivate. Derivata di funzioni composte. Derivata di funzioni inverse. Differenziale. Estremi locali e Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange e loro equivalenza. Conseguenze del Teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla, derivate e stretta monotonìa, caratterizzazione della monotonìa, condizioni sufficienti per la ricerca dei punti di estremo relativo. Teoremi di De L'Hopital. Discontinuità della funzione derivata. Formula di Taylor con resto di Peano e di Lagrange. Unicità della Formula di Taylor. Uso della Formula di Taylor nello studio di limiti. Applicazione della Formula di Taylor per lo studio della monotonìa e dei punti di estremo relativo. Uso delle derivate per stabilire identità o studiare disuguaglianze. Derivata di un determinante.

Funzioni convesse (e funzioni concave). Epigrafico. Definizione di funzione (strettamente) convessa (e di funzione (strettamente) concava). Caratterizzazioni geometriche della convessità. Continuità delle funzioni convesse. Esistenza delle derivate destra e sinistra. Caratterizzazione della convessità in termini di rapporto incrementale. Rette di appoggio. Caratterizzazione della convessità in termini di esistenza di rette di appoggio. Relazioni fra convessità, derivabilità ed esistenza di un'unica retta di appoggio. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili una volta. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili due volte. Punti di minimo per funzioni convesse. Punti di flesso. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di flesso. Dimostrazione della derivabilità di una funzione convessa in un intervallo in ogni punto tranne che in una infinità al più numerabile di punti. Funzioni convesse in un punto. Confronto delle due definizioni di convessità. Applicazione della Formula di Taylor per lo studio della convessità, della concavità e dei punti di flesso. Determinazione del grafico di una funzione. Metodo di Newton per l'approssimazione degli zeri.

Integrazione Indefinita. Definizione di integrale indefinito. Dimostrazione della omogeneità e dell'additività dell'integrale. Dimostrazione della Formula di Integrazione per Parti. Dimostrazione dei due Teoremi di Sostituzione. Applicazione delle varie formule al calcolo di integrali (Formule di ricorrenza, integrali di funzioni trigonometriche, integrazione di funzioni razionali fratte, integrazione di alcune funzioni irrazionali). Teorema di Liouville[(*)] e funzioni non integrabili elementarmente.

Integrazione secondo Riemann. Definizione di integrale di Riemann. Funzione di Dirichlet. Caratterizzazione dell'integrabilità. Classi di funzioni integrabili (funzioni continue; funzioni monotòne; funzioni generalmente continue e limitate, funzione di Lebesgue). Proprietà dell'integrale (tutte con dimostrazione). Il Primo Teorema della Media. Integrale definito e sue proprietà. Regole di integrazione definita: linearità, integrazione per parti, integrazione per sostituzione. Il Teorema Fondamentale del calcolo integrale. Alcune proprietà ulteriori della funzione integrale. Il Secondo Teorema della Media. Formula di Taylor con resto integrale. Irrazionalità di π. Formula di Wallis. Formula di Stirling. Cenni sulla misura di Peano-Jordan in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$ (Definizione. Proprietà. Esempio di insieme non misurabile. Misura di un punto e di un segmento). Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Misurabilità del grafico di una funzione integrabile secondo Riemann e di un dominio normale.

Integrali impropri. Integrali impropri di 1^a e di 2^a specie. Criteri di convergenza. Assoluta integrabilità e integrabilità (con esempi di funzioni integrabili, non assolutamente). Significato geometrico degli integrali impropri. Serie ed integrali. Integrali impropri di 3^a specie.

Successioni di funzioni. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme di successioni di funzioni: scambio di limiti, di limite e derivata, di limite ed integrale. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale di Riemann e per gli integrali impropri. Teorema di Dini. Teorema di Polya.

Metodi di risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a variabili separabili (soluzioni di primo tipo o costanti, di secondo tipo e di terzo tipo o tipo misto). Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti non costanti. Equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti (con Principio di Sovrapposizione). Equazione di Bernoulli.

Testi consigliati:

1) **C.D.Pagani, S.Salsa, Analisi Matematica, vol. 1, Masson 1991**

2) **C.D.Pagani, S.Salsa, Analisi Matematica, vol. 2, Masson 1991**

Durante le lezioni saranno distribuiti degli **Appunti** che integrano quanto contenuto nei testi consigliati.