CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA II

Anno Accademico 2000-01

(Prof. G. Emmanuele)

1-Serie di funzioni.

Serie di funzioni reali o complesse di variabile reale o complessa. Convergenza semplice, uniforme, assoluta e totale. Funzione di Weierstrass. Serie di potenze complesse. Raggio di convergenza e cerchio di convergenza. Teorema di Abel-Stolz. Teorema di Picard. Calcolo del raggio di convergenza. Serie di potenze e serie delle derivate. Serie di Taylor o Mac Laurin reale. Esempio di funzione di classe C^{∞}, non analitica. Condizioni sufficienti per la analiticità. Sviluppi notevoli. Serie di Fourier. Lemma di Riemann-Lebesgue. Teoremi di convergenza semplice ed uniforme (condizione (D) di Dirichlet e funzioni a variazione limitata). Calcolo di alcuni sviluppi in serie di Fourier. Integrazione delle serie di Fourier*. Identità di Parseval*.

2-Spazi metrici.

Definizione di spazio metrico ed esempi. Intorni sferici ed intorni. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera e isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi limitati. Metriche equivalenti. Successioni in spazi metrici e loro limiti. Spazi metrici completi. Contrazioni. Funzioni continue. Completamento di uno spazio metrico. Compattezza, sequenziale compattezza, completezza e totale limitatezza. Teorema di Bolzano-Weierstrass, Teorema di Borel-Heine e loro equivalenza. Funzioni uniformemente continue. Estensione di funzioni uniformemente continue*. Teorema di estensione di Tietze*. Teorema di Cantor-Heine. Teorema di Weierstrass. Connessione. Componenti connesse. Teorema di Esistenza degli Zeri. Vari tipi di connessione e loro relazioni (con esempi). Connessi in $\mathbb{R}$. Aperti connessi in $\mathbb{R}^n$.

3-Funzioni da $X \subset \mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$.

Norma e prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Alcune osservazioni sul calcolo dei limiti. Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziabilità. Teorema del Differenziale Totale. Confronto delle precedenti nozioni (con esempi). Differenziabilità di funzioni composte*. Derivazione di funzioni composte. Cammini, retta tangente, significato geometrico della differenziabilità e della derivabilità direzionale. Derivate e differenziali successivi*. Invertibilità dell'ordine di derivazione (per funzioni dotate di una derivata mista continua con dimostrazione e per funzioni differenziabili due volte senza dimostrazione). Formula di Taylor (con resto di Peano e resto di Lagrange). Funzioni omogenee. Teorema di Eulero. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Forme quadratiche. Autovalori. Caratterizzazioni delle forme quadratiche definite attraverso il segno degli autovalori. Caratterizzazioni delle forme quadratiche definite il calcolo dei determinanti delle matrici di Nord-Ovest*. Matrice Hessiana. Metodo per la ricerca dei punti di estremo (condizioni necessarie e condizioni sufficienti). Cammini rettificabili e loro lunghezza. Derivabilità nei punti di frontiera e Teorema di Whitney*.

4-Funzioni convesse.

Definizione di funzione convessa (e concava). Locale limitatezza superiore, continuità. Locale lipschitzianità di funzioni convesse*. Caratterizzazione della convessità per funzioni differenziabili una volta. Caratterizzazione della convessità per funzioni differenziabili due volte *. Iperpiano di appoggio e caratterizzazione della convessità *. Esistenza del gradiente in un punto e differenziabiltà*. Esistenza del gradiente in un aperto convesso e sua continuità*.

5-Funzioni implicite. Teoremi di inversione. Estremi vincolati.

Funzioni implicite. Teorema del Dini per funzioni reali di più variabili reali. Derivabilità parziale della funzione implicita nel caso scalare. Teorema del Dini per sistemi di funzioni reali di più variabili reali. Derivabiltà parziale della funzione implicita nell̀ caso vettoriale*. Teorema di inversione locale. Un Teorema di Inversione globale*. Punti di estremo vincolato (vincoli bilaterali e vincoli unilaterali) e ricerca dei punti di estremo vincolato (moltiplicatori di Lagrange e di Kuhn-Tucker; condizioni necessarie e condizioni sufficienti).

6-Teoria della misura secondo Peano-Jordan.

Misurabilità di insiemi elementari (insieme vuoto, rettangoli superiormente semiaperti o r.s.s. e plurirettangoli). Coerenza delle definizioni. La differenza di due r.s.s. è un plurirettangolo. Una unione finita di r.s.s. è un plurirettangolo. Unione, intersezione e differenza di plurirettangoli. Proprietà della misura dei plurirettangoli. Misurabilità di insiemi limitati. Unione, intersezione e differenza di insiemi limitati e misurabili. Proprietà della misura di insiemi limitati e misurabili*. Criterio di misurabilità. Misurabilità dell'interno e della chiusura di un insieme limitato e misurabile*. La misurabilità di un insieme equivale alla misurabilità della frontiera dell'insieme (con frontiera di misura nulla). Misurabilità di insiemi non limitati. Proprietà degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan e della misura di Peano-Jordan*. Successioni di insiemi e misura. Misura di insiemi prodotto. Esempi di insiemi non misurabili.

7-Integrale di Riemann.

Integrale di Riemann. Proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale*. Confronto fra la definizione data in Analisi Matematica I e la presente definizione*. Integrabilità di funzioni continue a meno di insiemi di misura nulla. Teorema della Media. Integrabilità e misurabilità del rettangoloide. Misurabilità di domini normali. Funzioni a scala e loro integrale. Teorema di riduzione e corollari. Teorema di cambiamento di variabili*. Coordinate polari, cilindriche, sferiche. Altri cambiamenti di variabili. Teorema di Guldino. Integrali impropri. Confronto con l'integrale di Riemann. Confronto con gli integrali impropri dell'Analisi

Matematica I. Proprietà *. Invadenza di insiemi. Integrali dipendenti da parametri. Teoremi di continuità e derivabilità in un rettangolo. Altri Teoremi di continuità e derivabilità *.

8-Equazioni differenziali.

Sistemi di equazioni differenziali. Problema di Cauchy ed Equazione integrale di Volterra. Teoremi di esistenza ed unicità in piccolo ed in grande. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teoremi di esistenza in piccolo ed in grande. Metodi risolutivi di alcuni tipi di equazioni differenziali (Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni di Bernoulli. Equazioni a coefficiente omogeneo. Equazione di Eulero. Altri tipi). Prolungabilità di soluzioni. Dipendenza continua. Sistemi di equazioni lineari. Spazio delle soluzioni. Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti. Matrice esponenziale. Teorema di Putzer. Caso della matrice dei coefficienti diagonalizzabile. Applicazione dei risultati generali allo studio delle equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti.

9-Curve ed integrali curvilinei.

Cammini semplici o curve. Cammini di classe C^1, di classe C^1 a tratti, regolari, regolari a tratti. Calcolo della lunghezza di un cammino di classe C^1 a tratti. Ascissa curvilinea. Cammini orientati. Integrali curvilinei di 1^a specie. Proprietà. Forme differenziali lineari ed integrale curvilineo di 2^a specie. Proprietà. Primitive di forme differenziali lineari. Primo criterio di integrabilità per forme differenziali lineari di classe C^0. Condizione di simmetria e forme differenziali lineari chiuse. Esempio di forma differenziale lineare chiusa non esatta. Forme differenziali lineari chiuse sono esatte in insiemi stellati. Forme differenziali lineari chiuse omogenee di grado $\alpha \neq -1$ sono esatte. Omotopie e semplice connessione. Secondo criterio di integrabilità per forme differenziali lineari di classe C^1*. Insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$ * e curve di Jordan. Formule di Gauss-Green in insiemi normali regolari del piano. Estensioni delle Formule di Gauss-Green *. Dimostrazione del secondo criterio di integrabilità per forme differenziali lineari di classe C^1 nel piano. Insiemi piani con lacune e esattezza di forme differenziali lineari chiuse in due variabili*. Equazioni differenziali e forme differenziali lineari. Fattore integrante.

10-Superfici ed integrali superficiali.

Superfici regolari. Piano tangente. Area di una superficie. Integrali superficiali. Forme differenziali bilineari. Teorema di Stokes*. Teorema della divergenza*. Dimostrazione del secondo criterio di integrabilità per forme differenziali lineari in tre variabili.

Durante l'anno saranno distribuiti degli

Appunti di Analisi Matematica II

che contengono tutto quanto svolto a lezione relativamente ai Capitoli 1-7. Gli argomenti dei Capitoli 8-10 vanno studiati sul testo

C.D.Pagani, S.Salsa, Analisi Matematica, vol. 2, Masson 1991

integrato da alcune note che saranno, anch'esse, fornite durante le lezioni.

Gli argomenti contrassegnati con asterisco si intendono senza dimostrazioni.