

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
DIARIO DELLE LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1
Anno Accademico 2013-2014
(Prof. G. Emmanuele)

14/10/2013: I numeri naturali: Concetti primitivi, Assiomi di Peano. Proposizione: 1 l'unico naturale non successivo. Somma in \mathbb{N} . Proprietà associativa. Proprietà commutativa. [Esercizio: $x \neq x + y$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$; $x + z = y + z \Rightarrow x = y$].

17/10/2013: Teorema dell'Ordinamento. Definizione di ordinamento in \mathbb{N} . Proprietà antisimmetrica e transitiva. [Esercizio: $x + z < y + z \Rightarrow x < y$; $1 \leq x$, per ogni $x \in \mathbb{N}$; $y > x \Rightarrow y \geq x^+$; $y^+ > x \Rightarrow y \geq x$; non esistono naturali compresi fra x ed x^+ , per ogni $x \in \mathbb{N}$]. Principio del Buon Ordinamento. Sottoinsiemi di \mathbb{N} dotati di massimo. Unicità del minimo e del massimo. Prodotto in \mathbb{N} . Proprietà distributiva a destra. Proprietà commutativa ed associativa. [Esercizio: $xz = yz \Rightarrow x = y$, $xz \geq yz \Rightarrow x \geq y$, $x \leq xy$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$]. Teorema della Divisione (solo esistenza).

21/10/2013: Differenza in \mathbb{N} . I numeri interi relativi come classi di equivalenza. Operazioni ed ordinamento in \mathbb{Z} . [Esercizio: Proprietà delle operazioni e dell'ordinamento in \mathbb{Z} . Legge di annullamento del prodotto. Regola dei segni]. \mathbb{N} come sottoinsieme di \mathbb{Z} . Seconda forma dell'Assioma di Induzione. Esistenza della scomposizione in fattori primi in \mathbb{N} .

24/10/2013: Teorema di Bezout e Corollario. Unicità della scomposizione in fattori primi. I numeri razionali come classi di equivalenza. Operazioni ed ordinamento in \mathbb{Q} . [Esercizi: Proprietà delle operazioni e dell'ordinamento in \mathbb{Q} . Legge di annullamento del prodotto. Regola dei segni]. \mathbb{Z} come sottoinsieme di \mathbb{Q} . Soluzioni razionali di equazioni algebriche a coefficienti in \mathbb{Z} . Irrisolubilità dell'equazione $x^2 = 2$ in \mathbb{Q} . Numeri razionali ed allineamento decimale. I numeri reali. Uguaglianza in \mathbb{R} .

28/10/2013: Ordinamento in \mathbb{R} . Successioni stabilizzate. Lemma e Teorema sulle successioni stabilizzate in \mathbb{R} . Operazioni elementari in \mathbb{R} (con la dimostrazione del solo risultato relativo all'introduzione della somma fra numeri reali positivi). Valore assoluto e sue prime proprietà. Altri casi della definizione delle operazioni elementari (si veda il libro di testo).

31/10/2013: Definizione di potenza ad esponente intero e sue proprietà. Dimostrazione dell'identità $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ ed applicazione alle proprietà delle potenze. Disuguaglianza di Bernoulli. Studio dell'equazione $x^n = a$ e definizione di radice n-esima aritmetica. Unicità della radice n-esima aritmetica. Prova dell'uguaglianza $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ nel caso "n pari".

04/11/2013: Esistenza della radice n-esima aritmetica. Maggiorazione dell'errore. Definizione di $a^{m/n}$ con $a > 0$ e proprietà delle potenze con base reale positiva ed esponente razionale (con dimostrazione fatta a lezione o da studiare sul libro di testo). Definizione di $a^{m/n}$ con $a < 0$ ed osservazioni sulla validità delle usuali proprietà delle potenze nel

caso di base reale negativa ed esponente razionale (si veda libro di testo). Convenzione $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ nel caso "a negativo ed n dispari.

07/11/2013: Definizione di a^x con base reale positiva ed esponente reale positivo. Proprietà. Altri casi della definizione di potenza con base reale positiva. Equazione esponenziale. Teorema di esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione esponenziale (fare solo la costruzione della soluzione). Maggiorazione dell'errore (si veda anche il libro di testo). Definizione di logaritmo. Proprietà del logaritmo. Minoranti, maggioranti, minimo, massimo di insiemi di \mathbb{R} . Esempio di calcolo di inf e sup. Definizione di estremo inferiore e di estremo superiore.

14/11/2013: Teorema di esistenza dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore. Completezza secondo Dedekind di \mathbb{R} ed incompletezza secondo Dedekind di \mathbb{Q} . Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore.

18/11/2013: Insiemi separati e contigui. Insiemi infiniti ed insiemi finiti. Insiemi numerabili. Dimostrazione della numerabilità di \mathbb{Q} e della non numerabilità di \mathbb{R} . Intorno sferico di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di raggio $r > 0$. Definizione di successione convergente. Esempi.

21/11/2013: Successioni divergenti. Esempi. Successioni oscillanti. Teoremi di unicità del limite, Permanenza del Segno (e Permanenza del Segno generalizzato), Confronto, Limitatezza di successioni convergenti, non limitatezza di successioni divergenti (tutti con dimostrazione, fatta a lezione o da studiare sul libro di testo).

25/11/2013: Successioni monotone e loro limiti. Dimostrazioni delle proprietà seguenti: $\lim_n a_n = a \Leftrightarrow \lim_n (a_n - a) = 0$, $\lim_n a_n = a \Rightarrow \lim_n |a_n| = |a|$, $\lim_n a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_n |a_n| = 0$. Limite della successione combinazione lineare e della successione prodotto (in tutti i casi possibili. Si veda anche il libro di testo). Forme indeterminate della somma (differenza) e del prodotto.

28/11/2013: Limite della successione dei reciproci e della successione quoziente (in tutti i casi possibili. Si veda anche il libro). Forme indeterminate del quoziente. Limite delle successioni x_n^a , a^{x_n} , $\log_a x_n$, $\log_{x_n} a$, $\log_{x_n} y_n$, $x_n^{y_n}$ in tutti i casi possibili (si veda anche il libro di testo) e relative forme indeterminate. Limite del quoziente di due polinomi. Limiti di $\sin x_n$, $\cos x_n$, $\operatorname{tg} x_n$ per successioni (x_n) convergenti.

02/12/2013: $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\sin x_n}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x_n}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x_n}{x_n^2}$,
 $\lim_{x_n \rightarrow x_0} \arcsin x_n$, $\lim_{x_n \rightarrow x_0} \arccos x_n$, $\lim_{x_n \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x_n$, $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x_n$,
 $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x_n$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\arcsin x_n}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x_n}{x_n}$

Enunciazione delle proprietà di monotonia e limitatezza della successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ e del suo limite, il numero "e" di Nepero. Enunciazione del limite notevole $\lim_{p_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{p_n}\right)^{p_n} = e^A$, per ogni $A \in \mathbb{R}$. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x_n \rightarrow 0} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\log(1+x_n)}{x_n}$,

$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n}$, $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n}$. Completamento dello studio della successione geometrica. Definizione di successione estratta.

05/12/2013: Lemma e Teorema sul limite di una successione estratta. Applicazione al calcolo di limiti (Esempi importanti: $\lim \frac{2^n}{n}$, $\lim \sqrt[n]{n}$). Dimostrazione della monotonia e limitatezza della successione di Nepero. Applicazioni di alcuni limiti notevoli al calcolo dell'area del cerchio. Esempio di applicazione economica del concetto di limite (problema del prestito).

09/12/2013: Studio del limite $\lim_{p_n \rightarrow +\infty} \frac{A^{p_n}}{p_n^b}$ e, come corollario, del limite $\lim_{p_n \rightarrow +\infty} \frac{\log^b p_n}{p_n^c}$. Confronto di infinitesimi e di infiniti. Definizione del simbolo di Landau "o piccolo". Distanza in \mathbb{R} . Intorno sferico di un punto. Punto interno, esterno, di accumulazione, di frontiera, isolato (e confronto fra tali nozioni). Insiemi aperti e insiemi chiusi.

12/12/2013: Proprietà degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi. Teorema di Borel-Heine e Teorema di Bolzano-Weierstrass (con corollario sull'esistenza di estratte convergenti).

16/12/2013: Estrazione di successioni monotone da successioni limitate. Estrazione di successioni monotone divergenti da successioni non limitate. Classe limite di una successione limitata. La classe limite un insieme chiuso. Definizione di massimo e minimo limite. Proprietà caratteristiche del massimo e del minimo limite. Convergenza e massimo e minimo limite. Estensione delle definizioni e dei risultati precedenti al caso di successioni non limitate inferiormente e/o superiormente.

19/12/2013: Studio della successione $\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$ con (p_n) divergente. Criterio di convergenza di Cauchy. Enunciazione dei Teoremi di Cesaro, del Teorema sulla Successione delle Medie Aritmetiche, del Teorema sulla Successione delle Medie Geometriche e del corollario sul limite di $(\sqrt[n]{a_n})$ (per il momento senza dimostrazioni). Studio di $(A^n/(n!))$, $(\log n/(n^b))$, $(\sqrt[n]{n})$. Definizione di serie numerica. Carattere di una serie numerica. Serie geometrica ed applicazione alla spiegazione della convenzione relativa ai numeri periodici di periodo 9.

09/01/2014: Serie di Mengoli e serie telescopiche. $\lim \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n = e^A$. Serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ con $x > 0$. Criterio di convergenza di Cauchy. Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che $\lim_n a_n = 0$. Serie armonica. Serie a termini di segno costante.

13/01/2014: Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che $\lim_n n a_n = 0$ (fare dimostrazione dal libro). Serie armonica generalizzata con esponente non superiore ad 1. Teorema del Confronto e Corollari. Studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha}$, $\alpha, \beta > 0$. Criterio del Rapporto (D'Alembert) e maggiorazione dell'errore.

16/01/2014: Corollario del Criterio del Rapporto. Criterio della Radice (Cauchy) e maggiorazione dell'errore. Corollario del Criterio della Radice. Criterio di Kummer e Criterio

di Raabe. Corollario del Criterio di Raabe. Completamento dello studio della serie armonica generalizzata.

21/01/2014: Esercizi su argomenti vari: Serie numeriche con parametri, Successioni con l'uso di limiti notevoli, Successioni definite per ricorrenza, Uso dell'Assioma di Induzione, Calcolo delle radici n-esime di numeri complessi.

10/03/2014: Definizione di limite di una funzione reale di variabile reale (tutti e nove i casi). Teorema di collegamento dei limiti di successioni e dei limiti di funzioni. Applicazioni del precedente Teorema alla determinazione di proprietà del limite di funzioni. Teorema di Limitatezza Locale.

13/03/2014: Funzioni monotone. Stretta monotonia ed iniettività. Limiti di funzioni monotone. Continuità di una funzione. Confronto con la definizione di limite. Teorema di Esistenza degli Zeri. Maggiorazione dell'errore.

17/03/2014: Teorema dei Valori Intermedi (Darboux). Teorema di Limitatezza delle Funzioni Continue. Teorema di Weierstrass. Punti di discontinuità. Osservazione sulla ricerca degli asintoti verticali in relazione ai punti di discontinuità di una funzione. Introduzione allo studio della continuità della funzione inversa di una funzione continua. Esempi di funzioni continue e invertibili con inversa non continua in un punto. Ogni funzione continua e invertibile è strettamente monotona, se definita in un intervallo. Ogni funzione monotona che assume tutti i valori fra inf e sup è continua, se definita in un intervallo.

20/03/2014: Continuità della funzione inversa di una funzione continua, invertibile definita in un intervallo. Continuità della funzione inversa di una funzione continua, invertibile definita in un insieme chiuso e limitato. Introduzione al concetto di uniforme continuità. Esempi.

24/03/2014: Definizione di uniforme continuità. Teorema di Cantor-Heine. Funzioni Hölderiane, Lipschitziane, contrazioni con esempi di funzione uniformemente continua non hölderiana, di funzione hölderiana non lipschitziana, di funzione lipschitziana non contrazione, di contrazione. Uniforme continuità di funzioni con asintoti orizzontali o obliqui. Limitatezza di funzioni uniformemente continue. Non uniforme continuità di funzioni dotate di asintoti verticali. Estendibilità di funzioni uniformemente continue ai punti della chiusura del dominio. Introduzione al concetto di derivata. Motivazioni di natura fisica e di natura geometrica. Definizione di retta tangente al grafico di una funzione.

27/03/2014: Definizione di derivata. Esempi e calcolo della derivata di alcune funzioni elementari. Derivabilità e continuità. Derivabilità di funzioni hölderiane con esponente maggiore di 1. Significato geometrico di f' ed equazione della retta tangente. Punti di flesso a tangente verticale e punti cuspidali.

31/03/2014: Punti angolosi. Derivabilità e continuità. Funzione derivata. Derivate di ordine maggiore di 1. Derivate delle funzioni elementari. Derivata di una combinazione lineare.

03/04/2014: Derivata di un prodotto, della funzione reciproca, del quoziente. Derivata della funzione composta. Introduzione geometrica alla derivata della funzione inversa.

07/04/2014: Derivazione della funzione inversa. Calcolo delle derivate di $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$. Estremi relativi e punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, loro equivalenza e loro significato geometrico. Corollari: funzioni con derivata identicamente nulla, derivabilità e monotonia.

10/04/2014: Vari esempi di applicazione del calcolo differenziale. Teorema di Darboux per la funzione derivata. Teorema di De L'Hopital per le forme indeterminate $0/0$.

14/04/2014: Limite di f' e del rapporto incrementale. Discontinuità della funzione derivata. Differenziabilità. Contatto di ordine n fra funzioni. Formula di Taylor con resto di Lagrange.

17/04/2014: Serie esponenziale. Serie di $\sin x$ e di $\cos x$. Formula di Taylor con resto di Peano. Uso delle derivate di ordine n , $n > 1$, per la ricerca dei punti di estremo o per lo studio della monotonia.

28/04/2014: Segmenti in \mathbb{R} ed in \mathbb{R}^2 . Epigrafico. Funzioni convesse (concave). Condizione necessaria e sufficiente per la convessità. Stretta convessità. Teorema delle Tre Pendenze. Applicazioni alla monotonia della funzione rapporto incrementale, all'esistenza delle derivate laterali ed alla continuità delle funzioni convesse. Convessità di funzioni derivabili. rette di appoggio (supporto). Unicità della retta di supporto, convessità di funzioni derivabili, derivabilità di funzioni convesse. Monotonia della funzione derivata prima e convessità. (Derivata seconda e convessità. Punti di flesso a tangente non verticale. Condizione necessaria e condizione sufficiente perché un punto sia di flesso.)

N.B. Gli argomenti indicati fra parentesi sono stati sviluppati dalla Prof.ssa Naselli nel corso di Laboratorio di Calcolo, ma fanno parte ANCHE del programma di Analisi Matematica I.

05/05/2014: Primitive. Primitive di una funzione definita in un intervallo differiscono per una costante. Primitive di funzioni definite in unione di intervalli a due a due disgiunti. Integrale indefinito. Proprietà di omogeneità e di distributività dell'integrale indefinito. Integrazione per parti. Esempi di applicazione delle proprietà dimostrate.

08/05/2014: Dimostrazione del Teorema di Integrazione per Parti. Primo Teorema di Sostituzione (con dimostrazione). Secondo Teorema di Sostituzione (con dimostrazione). Esempi di calcolo di integrali indefiniti con l'uso dei Teoremi dimostrati.

12/05/2014: Definizione di integrale di Riemann ed osservazioni sulla definizione di integrale di Riemann.

15/05/2014: Criterio di integrabilità di Riemann. Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni generalmente continue e limitate, delle funzioni monotone. Calcolo dell'integrale di Riemann di funzioni integrabili dotate di primitive.

19/05/2014: Definizione di somma integrale secondo Cauchy ed applicazioni dell'integrale di Riemann al calcolo di lunghezze di grafici, di volume di solidi di rotazione attorno all'asse \vec{x} , di volume di solidi di rotazione attorno all'asse \vec{y} (dal libro), di area di superfici di rotazione (dal libro), di lavoro di una forza variabile in funzione della posizione. Proprietà dell'integrale di Riemann: integrabilità in sottointervalli, omogeneità (dal libro), distributività (dal libro), additività, positività, monotonia rispetto all'intervallo e rispetto alla funzione integranda, integrabilità della composizione di una funzione integrabile ed una lipschitziana, integrabilità di $|f|$, f^n , fg , $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, f^+ , f^- , integrabilità di $1/f$ (dal libro). Teorema della Media. Integrale definito. Funzione integrale. Prime proprietà della funzione integrale.

22/05/2014: Teorema di Derivabilità della Funzione Integrale. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Esempio di funzione strettamente monotona derivabile, la cui funzione derivata possiede infiniti zeri. Esempio di funzione con grafico dotato di flesso a tangente verticale, ma non convessa né concava in un intorno sinistro o destro. Misura di Peano-Jordan: insiemi elementari e loro misura, misurabilità di insiemi limitati e con punti interni, insiemi limitati e privi di punti interni, insiemi non limitati. Esempio di insieme non misurabile. Proprietà degli insiemi misurabili e della loro misura (solo enunciati).

26/05/2014: Spiegazione del significato geometrico dell'integrale di Riemann: il rettangoloide relativo ad una funzione non negativa e integrabile secondo Riemann è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua misura è uguale al valore dell'integrale di Riemann della funzione. Enunciazione dell'implicazione inversa. Uso del significato geometrico dell'integrale di Riemann per "spiegare" alcuni risultati sull'integrale di Riemann (incluso il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale). Integrazione per parti per l'integrale definito. Formula di Taylor con resto in forma integrale. Teoremi di sostituzione per l'integrale definito (da fare dal libro). Integrali impropri di prima specie. Integrabilità e sommabilità. Condizione sufficiente per la integrabilità e condizione sufficiente per la sommabilità. Teorema del confronto e corollario. Funzione campione. Criterio dell'integrale.

09/06/2014: Criterio di Cauchy. Assoluta sommabilità e confronto con la sommabilità. Integrale improprio di seconda specie. Integrabilità e sommabilità. Condizione sufficiente per la integrabilità e condizione sufficiente per la sommabilità. Teorema del confronto e corollario. Funzione campione. Uso dell'integrale improprio di seconda specie per calcolare l'integrale di Riemann di funzioni generalmente continue e limitate. Integrale improprio di terza specie. Integrazione definita di funzioni dispari, pari e periodiche. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine: determinazione degli integrali indipendenti dell'equazione omogenea associata attraverso lo studio delle applicazioni lineari $D - \alpha I$. Caso di radici reali e distinte dell'equazione caratteristica.

12/06/2014: Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine: determinazione degli integrali indipendenti dell'equazione omogenea associata attraverso lo studio delle applicazioni lineari $D - \alpha I$. Caso di radici reali e coincidenti e caso delle radici complesse dell'equazione caratteristica. Descrizione del metodo di variazione delle costanti

di Lagrange per l'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti. Determinazione del campo di esistenza di funzioni definite tramite funzioni integrali e dell'insieme di derivabilità.