CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA II

Anno Accademico 2006-2007

(Prof. G. Emmanuele)

<u>Successioni e serie di funzioni</u> Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme; significato geometrico dei due tipi di convergenza. Successione geometrica ed altri esempi. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme. Criteri di Cauchy per la convergenza puntuale e la convergenza uniforme. Scambio di limiti. Continuità della funzione limite. Scambio di limite e derivata*. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale di Riemann*. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale improprio*. Teorema di Dini per la convergenza uniforme. Teorema di Polya per la convergenza uniforme*. Serie di funzioni. Tipi di convergenza delle serie di funzioni: puntuale, uniforme, assoluta e totale. La convergenza totale implica la uniforme e l'assoluta, che a loro volta implicano la puntuale. Controesempi alle implicazioni inverse. La convergenza assoluta ed uniforme non sono confrontabili. Traduzione dei teoremi sulle successioni di funzioni nel linguaggio delle serie di funzioni: scambio di limite e serie, derivazione per serie, integrazione per serie. Serie di potenze. Definizione di intervallo di convergenza, di raggio di convergenza e formule di calcolo. Teorema di Abel*. Convergenza totale delle serie di potenze. Derivazione della funzione somma di una serie di potenze. Serie di Taylor e di Mac Laurin. Condizioni sufficienti per la sviluppabilità. Esempio di funzione non sviluppabile in serie di Taylor*. Sviluppi notevoli: $e^x, \cos x, \sin x$. Serie binomiale*. Sviluppo di $\arcsin x, \operatorname{arctg} x, \log(1+x), \log(1-x)$. Prolungamento di funzioni definite in intervalli a funzioni definite in $\mathbb{R}$ periodiche, periodiche pari e periodiche dispari. Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo 2π. Convergenza puntuale delle serie di Fourier* (condizione di Dirichlet - funzioni a variazione totale limitata). Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo arbitrario.

<u>Spazi metrici, spazi normati, spazi prehilbertiani.</u> Definizione di spazio metrico ed esempi ($\mathbb{R}^n$, $C^0([a,b], d_L), C^0([a,b], d_I)$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera e isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi limitati. Diametro di un insieme. Successioni in spazi metrici e loro limiti. Convergenza di successioni in $\mathbb{R}^n$. Spazi metrici completi. $\mathbb{R}^n$ è completo, $C^0([a,b])$ è completo. Esempi di spazi metrici non completi. Contrazioni e Teorema di Banach-Caccioppoli (e suo corollario). Limiti di funzioni. Criterio di Cauchy per la convergenza. Limiti di funzioni composte. Limiti di restrizioni. Funzioni continue. Compattezza, sequenziale compattezza (e loro equivalenza*). Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Borel-Heine in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Weierstrass. Connessione e proprietà. I connessi in $\mathbb{R}$ sono tutti e solo gli intervalli. Teorema di Esistenza degli Zeri. Teorema di Darboux. Altri tipi di connessione e relazioni con la connessione* in $\mathbb{R}^n$

Calcolo differenziale per funzioni vettoriali di più variabili reali. Limiti di funzioni da $X \subset \mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$. Varie definizioni di limite. Funzioni componenti. Alcune osservazioni sulla definizione di limite e sul calcolo dei limiti (attraverso restrizioni a rette). Teorema di confronto. Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziabilità. La differenziabilità implica la derivabilità in ogni direzione. Esempio di funzione continua e non differenziabile. Esempio di funzione dotata di derivate direzionali e non differenziabile. Teorema del Differenziale Totale*. Esempio di funzione differenziabile, dotata di derivate non continue. Derivazione e differenziabilità di funzioni composte*. Esempi. Significato geometrico della differenziabilità ed equazione dell'iperpiano tangente. Derivate e differenziali successivi. Invertibilità dell'ordine di derivazione (Teorema di Schwarz)*. Esempio di funzione dotata di derivate seconde non uguali in un punto. Invertibilità dell'ordine di derivazione per funzioni differenziabili più di una volta*. Formula di Taylor con resto di Peano* e con resto di Lagrange*. Calcolo differenziale per funzioni definte in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^p$ (continuità, derivate direzionali, matrice Jacobiana, differenziabilità). Teorema di Lagrange per funzioni scalari*. Non validità del Teorema di Lagrange per funzioni vettoriali (esempio). Funzioni con gradiente nullo. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$. Forme quadratiche definite, semidefinite e indefinite. Autovalori e determinazione del loro segno attraverso quello dei coefficienti del polinomio caratteristico. Matrice Hessiana. Condizione sufficiente perché un punto critico sia di estremo relativo. Condizione necessaria perché un punto critico sia di estremo relativo*. Metodo per la ricerca dei punti di estremo relativo ed assoluto. Funzioni omogenee e Teorema di Eulero*.

Funzioni implicite. Teoremi di inversione. Estremi vincolati. Funzioni implicite. Teorema del Dini o di esistenza della funzione implicita (enunciato nel caso di funzione vettoriale, con dimostrazione nel caso di funzione scalare). Teorema di derivabilità della funzione implicita*. Punti di estremo vincolato. Teorema del moltiplicatore di Lagrange (enunciato nel caso di funzione vettoriale, con dimostrazione nel caso di funzione scalare). Funzione Lagrangiana. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di estremo vincolato per funzioni di classe C^2 *.

Misura e integrale di Lebesgue. Insiemi elementari e loro misura. Proprietà*. Misurabilità di insiemi aperti limitati e chiusi limitati. Misurabilità di insiemi limitati. Proprietà*. Misurabilità di insiemi non limitati. Proprietà*. Funzioni misurabili e proprietà*. Integrale di Lebesgue (caso di funzione misurabile e limitata su insiemi di misura finita; caso di funzione misurabile e non negativa su insieme di misura finita; caso di funzione misurabile su insieme di misura finita; caso di funzione misurabile e non negativa su insieme misurabile; caso di funzione misurabile si insieme misurabile). Proprietà*. Significato geometrico della sommabilità. Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue*. Teorema di Beppo-Levi*. Sezioni, proiezioni e Teoremi di Tonelli e Fubini*. Diffeomorfismi e Teorema di Cambiamento di Variabili*. Coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio. Esempi. Confronto con l'integrale di Riemann e con l'integrale improprio delle funzioni di una variabile*.

Curve ed integrali curvilinei. Cammini, curve. Sostegno. Cammini regolari a tratti e retta tangente. Lunghezza e formula di calcolo*. Integrale curvilineo di 1^a specie. Forme differenziali lineari e integrale curvilineo di 2^a specie. Forme esatte o dotate di potenziale. Forme chiuse. Condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza e sua interpretazione fisica (con cenno della dimostrazione). Condizioni sufficienti per l'esattezza di forme differenziali lineari chiuse: forme differenziali lineari positivamente omogenee di grado $\alpha \neq -1$ e calcolo di primitive, forme differenziali lineari e calcolo di primitive in insiemi stellati. Insiemi semplicemente connessi e condizione sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale lineare*. Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$: curve di Jordan e Teorema di Jordan*. Domini piani a connessione multipla. Lacune. Integrabilità di forme differenziali lineari chiuse in domini a connessione multipla (solo enunciato). Teorema di Gauss-Green in domini normali e sue estensioni*.

Equazioni Differenziali e Sistemi di Equazioni Differenziali. Definizione di equazione differenziale e di sistema di equazioni differenziali. Problema di Cauchy. Equazione integrale di Volterra. Teorema di esistenza ed unicità in piccolo (enunciato nel caso vettoriale, con dimostrazione nel caso scalare). Teorema di Peano*. Prolungabilità di soluzioni e Teorema di esistenza ed unicità e di sola esistenza in grande*. Studio dei sistemi di equazioni lineari (Spazio delle soluzioni. Matrice esponenziale e sue proprietà*. Uso della matrice esponenziale per risolvere i sistemi omogenei di equazioni lineari. Matrice Wronskiana e determinante Wronskiano. Sistemi non omogenei. Teorema di Putzer*.). Studio di alcuni tipi di equazioni differenziali (Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari. Equazione di Bernoulli. Equazioni omogenee. Equazioni esatte ed equazioni con fattore integrante).

Testo consigliato

G. Emmanuele, Analisi Matematica I, Foxwell & Davies Italia, 2003

G. Emmanuele, Analisi Matematica II, Foxwell & Davies Italia, 2004

N.B. Dei Teoremi contrassegnati con l'asterisco non è necessario conoscere la dimostrazione