CORSO DI LAUREA IN FISICA

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA II

Anno Accademico 2009-2010

(Prof. G. Emmanuele)

Serie di funzioni. Serie di potenze e di Fourier . Serie di funzioni. Convergenza puntuale, uniforme, assoluta, totale. Esempio di Weierstrass*. Serie di potenze in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. Raggio di convergenza; intervallo e cerchio di convergenza. Criterio di D'Alembert. Teorema di Abel*. Funzioni analitiche e funzioni di classe C^∞, non analitiche*. Condizioni sufficienti per l'analiticità. Sviluppi in serie di funzioni notevoli. Serie trigonometriche. Prolungamento di funzioni definite in intervalli a funzioni definite in $\mathbb{R}$ periodiche, periodiche pari e periodiche dispari. Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo 2π. Convergenza puntuale delle serie di Fourier*. Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo arbitrario.

Spazi metrici, spazi normati, spazi prehilbertiani. Definizione di spazio metrico ed esempi ($\mathbb{R}^n$, $C^0([a,b],d_L), C^0([a,b],d_I)$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera e isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Metrica indotta. Insiemi limitati. Diametro di un insieme. Successioni in spazi metrici e loro limiti. Convergenza di successioni in $\mathbb{R}^n$. Spazi metrici completi. $\mathbb{R}^n$ è completo, $C^0([a,b])$ è completo. Esempi di spazi metrici non completi. Contrazioni e Teorema di Banach-Caccioppoli. Limiti di funzioni. Criterio di Cauchy per la convergenza. Limiti di funzioni composte. Limiti di restrizioni. Funzioni continue. Compattezza, sequenziale compattezza (e loro equivalenza*). Relazioni con la totale limitatezza e completezza secondo Cauchy. Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Borel-Heine in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Weierstrass. Connessione e proprietà. I connessi in $\mathbb{R}$ sono tutti e solo gli intervalli. Teorema di Esistenza degli Zeri. Teorema di Darboux. Aperti connessi e poligonali in $\mathbb{R}^n$.

Calcolo differenziale per funzioni vettoriali di più variabili reali. Limiti di funzioni da $X \subset \mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$. Varie definizioni di limite. Funzioni componenti. Alcune osservazioni sulla definizione di limite e sul calcolo dei limiti (attraverso restrizioni a rette). Teorema di confronto. Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziabilità. La differenziabilità implica la derivabilità in ogni direzione. Esempio di funzione continua e non differenziabile. Esempio di funzione dotata di derivate direzionali e non differenziabile. Teorema del Differenziale Totale*. Esempio di funzione differenziabile, dotata di derivate non continue. Derivazione di funzioni composte. Differenziabilità di funzioni composte*. Significato geometrico della differenziabilità ed equazione dell'iperpiano tangente. Derivate e differenziali successivi. Invertibilità dell'ordine di derivazione*. Esempio di funzione dotata di derivate seconde miste non uguali in un punto. Invertibilità dell'ordine di derivazione per funzioni differenziabili più di una volta*. Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange*. Calcolo differenziale per funzioni definte in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^p$ (continuità, derivate direzionali, matrice Jacobiana, differenziabilità). Teorema di Lagrange per funzioni scalari*. Non validità del Teorema di Lagrange per funzioni vettoriali (esempio). Funzioni con gradiente nullo. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$. Forme quadratiche definite, semidefinite e indefinite. Autovalori e determinazione del loro segno attraverso quello dei coefficienti del polinomio caratteristico*. Matrice Hessiana. Condizione sufficiente perché un punto critico sia di estremo relativo. Condizione necessaria perché un punto critico sia di estremo relativo*. Metodo per la ricerca dei punti di estremo relativo ed assoluto. Funzioni omogenee e Teorema di Eulero*.

Funzioni implicite. Estremi vincolati. Funzioni implicite. Teorema del Dini o di esistenza della funzione implicita (con dimostrazione nel caso di funzione scalare di due variabili reali, solo enunciato negli altri casi, incluso quello di funzione vettoriale). Teorema di derivabilità della funzione implicita (con dimostrazione nel caso di funzione scalare di due variabili reali, solo enunciato negli altri casi, incluso quello di funzione vettoriale). Punti di estremo vincolato. Teorema del moltiplicatore di Lagrange (con dimostrazione nel caso di funzione scalare di due variabili reali, solo enunciato negli altri casi, incluso quello di funzione vettoriale). Funzione Lagrangiana. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di estremo vincolato per funzioni di classe C^2 *.

Misura e integrale di Lebesgue. Insiemi elementari e loro misura. Proprietà*. Misurabilità di insiemi aperti limitati e chiusi limitati. Misurabilità di insiemi limitati. Proprietà*. Misurabilità di insiemi non limitati. Proprietà*. Insiemi di misura nulla e proprietà valide quasi ovunque. Funzioni misurabili. Classi di funzioni misurabili. Proprietà delle funzioni misurabili*. Integrale di Lebesgue (caso di funzione misurabile e limitata su insiemi di misura finita; caso di funzione misurabile e non negativa su insieme di misura finita; caso di funzione misurabile su insieme di misura finita; caso di funzione misurabile e non negativa su insieme misurabile; caso di funzione misurabile si insieme misurabile). Proprietà*. Significato geometrico della sommabilità*. Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue*. Teorema di Beppo-Levi*. Sezioni, proiezioni e Teoremi di Tonelli e Fubini*. Diffeomorfismi e Teorema di Cambiamento di Variabili*. Coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio. Esempi. Confronto con l'integrale di Riemann e con l'integrale improprio delle funzioni di una variabile*.

Curve ed integrali curvilinei. Cammini, curve. Sostegno. Cammini regolari a tratti e retta tangente. Lunghezza e formula di calcolo. Integrale curvilineo di 1^a specie. Forme differenziali lineari e integrale curvilineo di 2^a specie. Forme esatte o dotate di potenziale. Forme chiuse. Condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza (con cenno della dimostrazione). Condizioni sufficienti (nessuna dimostrata) per l'esattezza di forme differenziali lineari chiuse: forme differenziali lineari positivamente omogenee di grado $\alpha \neq -1$ e calcolo di primitive, forme differenziali lineari e calcolo di primitive in insiemi stellati. Insiemi semplicemente connessi e condizione sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale lineare*. Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$: curve di Jordan e Teorema di Jordan*. Domini piani a connessione multipla. Lacune. Integrabilità di forme differenziali lineari chiuse in domini a connessione multipla *. Teorema di Gauss-Green in domini normali e sue estensioni*.

Equazioni Differenziali e Sistemi di Equazioni Differenziali. Definizione di equazione differenziale e di sistema di equazioni differenziali. Problema di Cauchy. Equazione integrale di Volterra. Teorema di esistenza ed unicità in piccolo * (caso scalare e caso vettoriale). Teorema di Peano*. Prolungabilità di soluzioni e Teorema di esistenza ed unicità e di sola esistenza in grande*. Studio dei sistemi di equazioni lineari (Spazio delle soluzioni. Matrice esponenziale e determinazione di alcune delle sue proprietà. Uso della matrice esponenziale per risolvere i sistemi omogenei di equazioni lineari. Matrice Wronskiana e determinante Wronskiano. Sistemi non omogenei. Teorema di Putzer*.). Equazioni differenziali esatte ed equazioni con fattore integrante).

Superfici regolari e regolari a pezzi. Superfici regolari e superfici regolari a pezzi. Piano tangente. Area di una superficie*. Integrale superficiale (di 1^a specie). Superfici orientate. Teorema di Stokes*. Teorema della divergenza*.

Testo consigliato G. Emmanuele, Analisi Matematica II, Foxwell & Davies Italia, 2004

N.B. Dei Teoremi di argomenti contrassegnati con l'asterisco non è necessario conoscere la dimostrazione