CORSO DI LAUREA IN FISICA
PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I
Anno Accademico 2008-2009
(Prof. G. Emmanuele)

I numeri naturali, interi e razionali. Concetti primitivi, Assiomi di Peano ed insieme $\mathbb{N}$. Somma di due numeri naturali e proprietà. Teorema dell'Ordinamento. Ordinamento in $\mathbb{N}$ e proprietà. Principio del Buon Ordinamento. Prodotto di due numeri naturali e proprietà. Teorema della Divisione. Differenza e insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi. Somma e prodotto in $\mathbb{Z}$. Legge di annullamento del prodotto. Ordinamento. Regola dei segni. Proprietà delle operazioni e dell'ordinamento. Identità di Bezout. Seconda Forma dell'Assioma di Induzione. Teorema Fondamentale dell'Aritmetica. Divisione e insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Somma e prodotto in $\mathbb{Q}$. Legge di annullamento del prodotto. Ordinamento. Regola dei segni. Proprietà delle operazioni e dell'ordinamento. Allineamento decimale periodico. Soluzioni razionali di equazioni algebriche a coefficienti interi. Insufficienza dell'insieme "$\mathbb{Q}$".
I numeri reali. Definizione di numero reale come allineamento decimale. Ordinamento. Valore assoluto. Struttura algebrica: successioni stabilizzate; somma e prodotto di due numeri reali positivi; somma e prodotto di due numeri reali arbitrari; altre operazioni. Il Principio di Induzione (con applicazione a: Binomio di Newton, progressioni geometriche, disuguaglianza di Bernoulli, scomposizione di $x^n - y^n$). Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Esistenza ed unicità della radice n-esima aritmetica. L'equazione $x^n = y$. Potenze di base reale con esponente reale. Logaritmi* e proprietà. Insiemi numerici limitati e non limitati. Maggioranti e minoranti. Massimo e minimo. Estremo superiore ed inferiore. Proprietà di completezza (secondo Dedekind). Esistenza di un unico campo totalmente ordinato completo secondo Dedekind*.Insiemi numerici separati e contigui. Funzioni, dominio, codominio, insieme immagine, campo di esistenza. Funzioni reali di una variabile reale (funzioni elementari). Funzioni iniettive, suriettive, biettive, invertibili e funzione inversa. Funzione composta. Grafico. Funzioni pari, dispari. Funzioni periodiche. Funzioni limitate.
I numeri complessi. Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo. $\mathbb{C}$ non è campo totalmente ordinato. Forma algebrica. Coniugato. Piano di Argand-Gauss. Modulo ed argomento. Forma trigonometrica. Potenze dei numeri complessi. Radici n-esime. Radici primitive dell'unità. Teorema Fondamentale dell'Algebra*. Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte*.
Distanza in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$. Definizione di distanza in $\mathbb{R}^n$. Proprietà. Intorni sferici e loro proprietà. Punto interno, esterno, di accumulazione, di frontiera, isolato. Insiemi aperti, insiemi chiusi e loro proprietà. Interno, derivato, frontiera, chiusura di un insieme e proprietà. Teorema di Heine-Borel in $\mathbb{R}$. Insiemi limitati e diametro. Distanza di due insiemi.
Successioni. Limiti di una successione. Teorema di unicità del limite. Teorema della permanenza del segno. Teorema di confronto. Teorema di limitatezza delle successioni convergenti. Successioni monotòne e loro limiti. La successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$. Successioni estratte. Operazioni sui limiti di successioni. Forme indeterminate. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Ogni successione limitata ammette estratte monotòne convergenti. Insiemi

con distanza nulla. Teorema di Cantor sulle successioni decrescenti di insiemi chiusi e limitati. Criterio di convergenza di Cauchy e completezza secondo Cauchy di $\mathbb{R}$. Infinitesimi ed infiniti (definizioni, confronto, Principio di sostituzione). Alcuni limiti notevoli (limite di funzioni razionali fratte; limite della successione geometrica; $\lim_n \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} = e$; $\lim_n \frac{{p_n}^b}{A^{p_n}}$ con $b > 0, A > 1, p_n \to +\infty$; $\lim_n \sqrt[n]{n}$). Massimo e minimo limite (classe limite, definizione, caratterizzazione in termini di ϵ e ν, caratterizzazione in termini di maggioranti e minoranti definitivi*, proprietà*, studio di $\lim_n (1 + \frac{1}{p_n})^{p_n}$ con $p_n \to \infty$). I Teoremi di Cesaro (teoremi per le forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, successione delle medie aritmetiche, successione delle medie geometriche e conseguenze)*. Equivalenza della completezza secondo Dedekind, della completezza secondo Cauchy e di altre proprietà in campi totalmente ordinati*.

Serie numeriche. Definizione di serie. Carattere di una serie e prime proprietà (Criterio di Cauchy, condizione necessaria di convergenza, somma di due serie, prodotto di una serie per una costante). Serie geometrica (con applicazione al calcolo delle frazioni generatrici). Serie telescopiche. Serie armonica. Serie a termini non negativi. Criteri del confronto, della radice, del rapporto, di Raabe, di condensazione di Cauchy. Maggiorazione dell'errore. Criteri di Abel* e di Dirichlet*, di Leibnitz (ancora con maggiorazione dell'errore). Irrazionalità del numero di Nepero. Convergenza e convergenza assoluta. Proprietà associativa e commutativa (con teorema di Riemann-Dini*). Prodotto secondo Cauchy (esempio di serie convergenti il cui prodotto non converge, Teoremi di Abel*, Cauchy*, Mertens*, Hardy*).

Funzioni reali di variabile reale. Definizione di limite. Limiti di restrizioni, limiti destro e sinistro. Relazione fra limiti di successioni e limiti di funzioni. Teoremi sui limiti (fra cui il Teorema sul limite di una Funzione Composta). Forme indeterminate. Asintoti. Limiti notevoli ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$; limiti dedotti dal numero di Nepero). Funzioni monotòne in un punto e funzioni monotòne in un intervallo (con confronto delle due definizioni). Esistenza del limite per funzioni monotòne. Criterio di Cauchy. Infinitesimi ed infiniti.

Funzioni continue. Definizione di continuità. Punti di discontinuità. Proprietà fondamentali delle funzioni continue su un intervallo: Teorema di Esistenza degli Zeri, Teorema di Weierstrass, Teorema dei valori intermedi. Continuità, monotonìa ed invertibilità. Successioni definite per ricorrenza e loro studio; algoritmo di Erone. Funzioni razionali intere e loro limiti. Funzioni razionali fratte e loro limiti. Esponenziali e logaritmi. Funzioni iperboliche e loro inverse. Funzioni trigonometriche e loro inverse.

Uniforme continuità. Esempi. Definizione di uniforme continuità. Teorema di Cantor-Heine. Asintoti ed uniforme continuità. Condizione necessaria per la continuità uniforme*. Funzioni lipschitziane, hölderiane ed uniformemente continue (con esempi). Prolungabilità di funzioni uniformemente continue*.

Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale. Definizione di derivata. Derivata destra e derivata sinistra. Significato geometrico del limite del rapporto incrementale (retta tangente, punti angolosi, cuspidali, di flesso a tangente verticale). Funzione derivata. Calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Derivate successive. Derivata delle funzioni combinazione lineare, prodotto e quoziente. Derivata di funzioni composte. Derivata di funzioni inverse. Estremi locali e Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange e loro equivalenza. Conseguenze del Teorema di Lagrange: funzioni con derivata

nulla, derivate e stretta monotonìa, caratterizzazione della monotonìa, condizioni sufficienti per la ricerca dei punti di estremo relativo. Teoremi di De L'Hopital. Discontinuità della funzione derivata. Formula di Taylor con resto di Peano* e di Lagrange. Unicità della Formula di Taylor*. Uso della Formula di Taylor nello studio di limiti. Applicazione della Formula di Taylor per lo studio della monotonìa e dei punti di estremo relativo. Uso delle derivate per stabilire identità o studiare disuguaglianze.
Funzioni convesse (e funzioni concave). Epigrafico. Definizione di funzione (strettamente) convessa (e di funzione (strettamente) concava). Caratterizzazioni geometriche della convessità. Continuità delle funzioni convesse. Esistenza delle derivate destra e sinistra. Caratterizzazione della convessità in termini di rapporto incrementale. Rette di appoggio. Caratterizzazione della convessità in termini di esistenza di rette di appoggio. Relazioni fra convessità, derivabilità ed esistenza di un'unica retta di appoggio. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili una volta. Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili due volte. Punti di minimo per funzioni convesse. Punti di flesso. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di flesso. Derivabilità di una funzione convessa in un intervallo*. Funzioni convesse in un punto e confronto delle due definizioni di convessità*. Applicazione della Formula di Taylor per lo studio della convessità, della concavità e dei punti di flesso. Determinazione del grafico di una funzione. Metodo di Newton per l'approssimazione degli zeri*.
Integrazione Indefinita. Definizione di integrale indefinito. Omogeneità e additività dell'integrale. Formula di Integrazione per Parti. Teoremi di Sostituzione. Applicazione al calcolo di integrali (Formule di ricorrenza, integrali di funzioni trigonometriche, integrazione di funzioni razionali fratte, integrazione di alcune funzioni irrazionali).
Integrazione secondo Riemann. Definizione di integrale di Riemann. Funzione di Dirichlet. Caratterizzazione dell'integrabilità. Classi di funzioni integrabili. Funzione di Lebesgue*. Proprietà dell'integrale*. Il Primo Teorema della Media. Integrale definito e sue proprietà. Regole di integrazione definita: linearità, integrazione per parti, integrazione per sostituzione. Il Teorema di Derivabilità della Funzione Integrale ed il Teorema Fondamentale del calcolo integrale. Alcune proprietà ulteriori della funzione integrale. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Cenni di teoria della Misura di Peano-Jordan*.
Integrali impropri. Integrali impropri di 1^a e di 2^a specie. Criteri di convergenza. Assoluta integrabilità e integrabilità. Significato geometrico degli integrali impropri. Serie ed integrali. Integrali impropri di 3^a specie.
Successioni di funzioni. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Teoremi. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale di Riemann e per gli integrali impropri. Teorema di Dini. Teorema di Polya*.
Metodi di risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti non costanti. Equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti (con Principio di Sovrapposizione). Equazione di Bernoulli.

N.B. Le dimostrazioni degli argomenti contrassegnati con * possono essere omesse

Testo consigliato:

1) **G. Emmanuele, Analisi Matematica 1, Foxwell and Davies UK, 2008 (seconda edizione)**
2) **G. Emmanuele, Analisi Matematica 2, Foxwell and Davies Italia, 2004 (prima edizione)**

Per quanto riguarda le esercitazioni, qualunque testo di esercizi di Analisi Matematica I e II va bene; in particolare i seguenti, che sono consultabili presso la biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica

1) S.Campanato, Esercizi e complementi di Analisi Matematica I e II, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini, Pisa
2) T.Caponetto, G.Catania, Esercizi di Analisi Matematica I, CULC,Catania
3) J.Cecconi, L.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica I e II, Liguori, Napoli
4) E.Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica I e II, Boringhieri, Torino
5) D.Greco, G.Stampacchia, Esercitazioni di Matematica I e II, Liguori, Napoli
6) P.Marcellini, C.Sbordone, Esercitazioni di Matematica I e II, Liguori, Napoli
7) G. Zwirner, Esercizi e complementi di Analisi Matematica I e II, Cedam, Padova

E' consigliabile non utilizzare un solo testo per gli esercizi, ma prendere esercizi da più fonti (fra cui internet, ma, ATTENZIONE!, solo da siti di docenti universitari); inoltre sul sito

http://www.dmi.unict.it/ $\sim$ emmanuele

è possibile trovare copia dei compiti d'esame da me assegnati in anni precedenti in differenti corsi di laurea. Consiglio anche di considerare compiti di altri docenti di differenti corsi di laurea e facoltà della nostra (o altre) università.

BUON LAVORO!!!!!!