INDICE

Capitolo 10 – Metodi risolutivi di alcuni tipi di equazioni differenziali

a Ruggero

PREFAZIONE

Il presente volume è rivolto, soprattutto, agli studenti dei Corsi di Laurea di Matematica, Fisica, Ingegneria e Informatica, anche se potrebbe essere sicuramente usato in tutti i corsi di laurea che richiedono lo studio del calcolo differenziale e del calcolo integrale. E perció esso contiene tutti gli argomenti che vengono solitamente trattati nei corsi di Analisi Matematica I. Il decimo ed ultimo capitolo, invece, descrive alcuni metodi risolutivi di certi tipi di equazioni differenziali ordinarie che comunemente sono parte dei corsi di Analisi Matematica II, ma che vengono qui inclusi perché spesso lo studente si trova a dover affrontare la ricerca delle soluzioni di certe equazioni differenziali prima ancora di averle studiate in Analisi Matematica, in modo da sapere come sia possibile determinare tali soluzioni, senza dover aspettare il corso di Analisi Matematica II.

Ampio spazio è dato ad alcuni argomenti che di solito si è costretti a trattare piuttosto velocemente nei corsi tradizionali, quali i numeri reali, la connessione fra la completezza secondo Dedekind e quella secondo Cauchy dell'insieme dei numeri reali, la possibilità di ottenere maggiorazioni dell'errore, lo studio delle successioni definite per ricorrenza, l'impiego del calcolo differenziale al fine di dimostrare identità o disuguaglianze, le funzioni convesse derivabili, l'integrazione su insiemi unione di intervalli a due a due disgiunti, le tecniche di integrazione indefinita (Integrazione per Parti, Integrazione per Sostituzione), l'impossibilità di calcolare in maniera esplicita primitive elementari di certe funzioni, il problema dell'esistenza o della non esistenza di primitive, i metodi risolutivi di alcuni tipi di equazioni differenziali. È inoltre presente una gran quantità di limiti notevoli e di integrali indefiniti immediati.

Fra gli esempi presentati ve ne sono un discreto numero relativi alle applicazioni dell'Analisi Matematica alle altre Scienze.

Dove possibile viene fatto uso di una visualizzazione geometrica dei concetti introdotti, che li renda più intuitivi. Sono presenti esercizi sia a carattere teorico che a carattere più tecnico, poiché, a nostro giudizio, entrambi servono ad una migliore comprensione sia analitica che globale della materia. E questo dovrebbe essere lo scopo ultimo di un corso universitario. Crediamo, infatti, che non bisogna solo fornire conoscenze di tecniche, ma soprattutto far acquisire capacità di analisi critica e di ragionamento. Sarà poi piuttosto semplice impadronirsi delle varie tecniche.

La gran parte delle dimostrazioni è standard (come è naturale per un corso di Analisi Matematica I), anche se alcune di esse sono non usuali. Molti esempi ed esercizi sono presi da materiale di varia origine (libri, compiti d'esame, appunti, pagine di internet). Hanno comunque una caratteristica comune: essi servono ad insegnare qualcosa di nuovo e non sono soltanto una semplice ripetizione di fatti o tecniche ben noti; altri sono originali e dovuti all'autore.

Tutti gli argomenti considerati vengono affrontati rigorosamente ed in maniera approfondita, in modo che abbiano pari dignità. Le definizioni vengono illustrate con commenti ed esempi affinché siano chiare e di esse sono evidenziati i punti salienti. Molti dei risultati presentati, soprattutto quelli universalmente riconosciuti come i più importanti teoremi dell'Analisi Matematica classica, vengono introdotti attraverso opportuni commenti che tentano di indirizzare il lettore attento sulla giusta via di pensiero, in modo tale che il successivo teorema e la sua dimostrazione non risultino inaspettati. Tali risultati vengono in seguito illustrati attraverso lo svolgimento di molti esempi ed esercizi, affinché emergano aspetti diversi delle questioni trattate. In quest'ottica per qualche risultato fondamentale (Teorema di Borel-Heine, Teorema di Bolzano-Weierstrass, Teorema di Esistenza degli Zeri, Teorema di Weieirstrass, Teorema di Cantor-Heine, ...) viene fornita (o suggerita) più di una dimostrazione; si spera così di renderne più semplici la comprensione e la memorizzazione. Alcuni esempi vengono dapprima svolti attraverso l'uso della sola definizione e poi vengono ripresi più volte attraverso l'impiego dei teoremi e delle tecniche che via via vengono acquisiti, in modo da sottolineare le differenze, sia da un punto di vista puramente teorico che da un punto di vista più tecnico, fra una definizione ed una condizione necessaria e/o sufficiente perché un certo fatto accada o fra l'uso di una certa tecnica e quello di un'altra. In particolare, si è cercato di inserire un buon numero di esempi svolti e di esercizi che utilizzano nozioni, risultati e tecniche relativi a buona parte del materiale acquisito fin a quel momento, e numerosi esercizi di varia natura, per ognuno degli argomenti trattati, che aiutino il lettore a valutare la propria comprensione della materia e la padronanza acquisita.

È inevitabile che vi siano numerosi errori, dei quali sono l'unico colpevole, nonostante il mio impegno e quello di alcuni miei colleghi che hanno avuto la bontà di aiutarmi nella rilettura delle bozze. Verso tutti loro sono in debito e per questo desidero ringraziarli di cuore, in particolare (non me ne vogliano gli altri) la Prof.ssa R. Cilia, il Prof. A. Majorana, il Prof. G. Russo, il Prof. G. Pulvirenti. Chiunque ne notasse qualcuno è invitato a comunicarmelo via email all'indirizzo << emmanuele@dmi.unict.it >>.

Grazie a tutti e buona lettura!