Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corsi di Studio in Matematica ed in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2002-03

Prova in itinere di Analisi Matematica 3 del giorno 18-01-2003

1) Data la funzione

$$f(x,y,z) = z + e^{z+x^2+y^2} + x^2 + y^2 \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che esiste un'unica funzione $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$, definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z) = 0$. Calcolare
(i) $\lim_{(x,y)\to\infty} z(x,y)$
(ii) i punti di estremo relativo di z, precisando, se possibile, se essi sono punti di estremo assoluto.

2) Data la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + az \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dove a, b sono parametri reali, trovare una condizione necessaria su a e b in modo che il punto $(1,1,1)$ sia di estremo relativo sotto la condizione

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0\,.$$

Supposta, poi, vera tale condizione, determinare
(i) per quali valori di a e b il punto $(1,1,1)$ è punto di massimo relativo
(ii) per quali valori di a e b il punto $(1,1,1)$ è punto di minimo relativo.

3) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \cos x \sqrt{y-1}$$

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corsi di Studio in Matematica ed in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2002-03

Analisi Matematica 3 - 07/02/2003

1) Date le funzioni

$$f(x,y,z) = x\cosh z + y\,e^{z+y^2} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$g(x,y,z) = \left[\mathrm{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right] e^{-(z+y)} - y \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che esiste un'unica funzione $\phi(z) = (x(z), y(z)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, di classe C^1 in $\mathbb{R}$, definita implicitamente dal sistema di equazioni $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$.

2) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

3) Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}\,dxdydz$$

essendo

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 2y \geq x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq xyz \leq 1\}$$

4) Dire se la forma differenziale lineare seguente

$$\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dy$$

è esatta nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ed, eventualmente, calcolarne le primitive.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corsi di Studio in Matematica ed in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2002-03

Analisi Matematica 3 - 25/02/2003

1) Dato l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^3 + x^4 = 0\}$$

provare che esso è chiuso e limitato. Quindi determinare i punti di A aventi
(i) distanza minima e massima dalla retta $y = 2$
(ii) distanza minima e massima dalla retta $x = 2$.

2) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_X \left(4\frac{y}{x} + 1\right) dxdy$$

dove

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x(4y + x)\, ,\ 1 \leq 4y + x \leq 4\}\, .$$

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+xy}{1-x^2} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinandone tutte le soluzioni definite in un sottointervallo di $]-1, 1[$.

4) Calcolare l'area della parte di piano delimitata dal segmento

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in [0, 1]\}$$

e dalla curva di equazioni parametriche

$$x(t) = \frac{3t}{1 + t^3}\, ,\ y(t) = \frac{3t^2}{1 + t^3} \qquad\qquad t \in [0, 1]\, .$$